

TESI

per a l'obtenció del GRAU DE DOCTOR

presentada a

L'ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERS
INDUSTRIALS DE BARCELONA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

per

Jordi MARTÍNEZ MIRALLES

**CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE L'ACÚSTICA DE LA
TENORA I DEL TIBLE EN EL DOMINI TEMPORAL**

Director de la Tesi

Joaquim AGULLÓ I BATLLE

juny de 1987

4.3. CALIBRACIÓ DE LA RESPOSTA IMPULSIONAL.

La tècnica emprada per calibrar la resposta impulsional es basa en la relació existent entre l'impuls inicial de velocitat produït per la descàrrega i l'impuls inicial de pressió que porta associat. Mitjançant la calibració del conjunt micròfon-amplificador de mesura es determina el valor de l'impuls inicial de pressió, i a partir d'aquest el de l'impuls inicial de velocitat, amb la qual cosa es pot establir la magnitud de la resposta. Aquesta manera d'operar evita l'haver de considerar factors difícilment quantificables relacionats amb la intensitat de la descàrrega, com són la capacitat del condensador emprat, la distància que separa els electrodos i les condicions ambientals de l'aire que els envolta.

El procediment de calibració és el següent: En ser cilíndrica la cavitat on es produeix la descàrrega, a l'impuls inicial de velocitat $-I_v$ li correspon un impuls proporcional de pressió $-I_p$ -definit per (Jessel 1973)

$$I_p / I_v = \rho_0 c = Z_0 \quad , \quad (4.3.1)$$

on ρ_0 és la densitat mitjana de l'aire i c és la celeritat de propagació del so en camp lliure, ambdues a les condicions ambientals existents. El producte d'ambdues constants s'anomena *impedància característica* del medi Z_0 .

La proporcionalitat entre els impulsos inicials de pressió i de velocitat permet definir un factor de conversió per obtenir la resposta impulsional, en Nm^{-3} , a partir de la pressió mesurada a la secció d'entrada.

El valor de l'impuls inicial de pressió ve definit per l'àrea que delimita. Si s'accepta que la forma de l'impuls correspon, tal com proposa Ayers (Ayers 1985), a la d'una funció Hanning definida per -figura 4.3-1-

$$p(t) = \frac{p_{\max.}}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t \right) \quad \text{amb} \quad 0 \leq t \leq T \quad , \quad (4.3.2)$$

el valor de l'impuls de pressió és aleshores

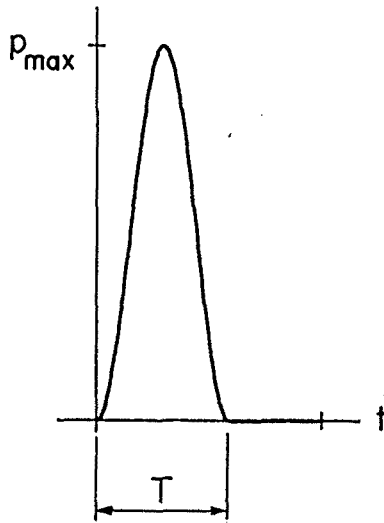


Fig. 4.3-1 Funció Hanning representativa d'un impuls inicial de pressió.

$$I_p = p_{\max.} T / 2 \quad , \quad (4.3.3)$$

i la relació entre l'impuls de pressió i l'impuls de velocitat és

$$\frac{I_p}{I_v} = \frac{p_{\max.} T}{2 I_v} = Z_0 \quad . \quad (4.3.4)$$

Per al cas d'un impuls de velocitat de valor unitari $-I'_v=1 \text{ m}$ - el valor de l'impuls de pressió corresponent ve donat per

$$I'_p = \frac{p'_{\max.} T}{2} = Z_0 \times 1 \text{ m} \quad . \quad (4.3.5)$$

Finalment si es modifica la fluctuació de pressió mesurada amb el micròfon d'acord amb el factor

$$\frac{p'_{\max.}}{p_{\max.}} = \frac{2 Z_0 \times 1 \text{ m}}{T p_{\max.}} \quad , \quad (4.3.6)$$

s'obté la fluctuació de pressió que correspondria a un impuls inicial de velocitat

de valor unitari. El quocient d'aquesta fluctuació pel valor de l'impuls, 1 m, proporciona el factor de calibració que permet passar a unitats de resposta impulsional

$$F_{cal.} = \frac{2 Z_0}{T p_{max.}} \quad (m^{-1}) \quad . \quad (4.3.7)$$

A l'hora de calibrar la resposta impulsional cal conèixer per tant l'amplada de l'impuls inicial -T-, el valor màxim de pressió de l'impuls inicial - $p_{max.}$ - i el de Z_0 a les condicions ambientals en que es realitza la mesura. A més cal establir la calibració de la cadena de mesura -micròfon més amplificador de mesura-.

Per tal de comprovar la validesa de la tècnica experimental emprada, i en particular del procediment de calibració, s'han obtingut les respostes impulsional de diferents tubs de prova: dos tubs cilíndrics metàl·lics de diferent diàmetre, un tub cònic truncat de fusta i un altre tub cònic, també de fusta, amb un tudell de tenora col·locat a l'extrem d'entrada. Les respostes s'han obtingut emprant capçals adients per a cada cas de manera que el diàmetre interior del capçal s'ajustés al diàmetre d'entrada del tub. Aquests capçals s'esquematitzen a la figura 4.3-2. Per al cas del tub cònic amb tudell s'empra el mateix capçal dissenyat per a mesurar les respostes de tibles i tenores.

Les respostes experimentals -figures (a)- es comparen amb les respostes impulsional teòriques -figures (b)- determinades mitjançant el mètode de multiconvolució que es presenta al capítol 5.

La figura 4.3-3 mostra les respostes experimental i calculada per a un tub cilíndric de 11,7 mm de diàmetre i de 1 m de longitud. En aquesta longitud s'inclou la llargada afegida pel capçal.

La semblança d'ambdues respostes és notable. A la resposta experimental s'observa però que l'impuls inicial va acompanyat d'una petita depressió o "estela" la presència de la qual és deguda a dos fets: En primer lloc, la descàrrega no genera un impuls de cabal net sinó que a l'expansió sobtada de l'aire que envolta els electrodos segueix una lleugera contracció (Moreno 1986). I en segon lloc, la descàrrega es comporta com una font acústica puntual i per tant l'ona inicial que genera és esfèrica. Aquesta tendeix a ser una

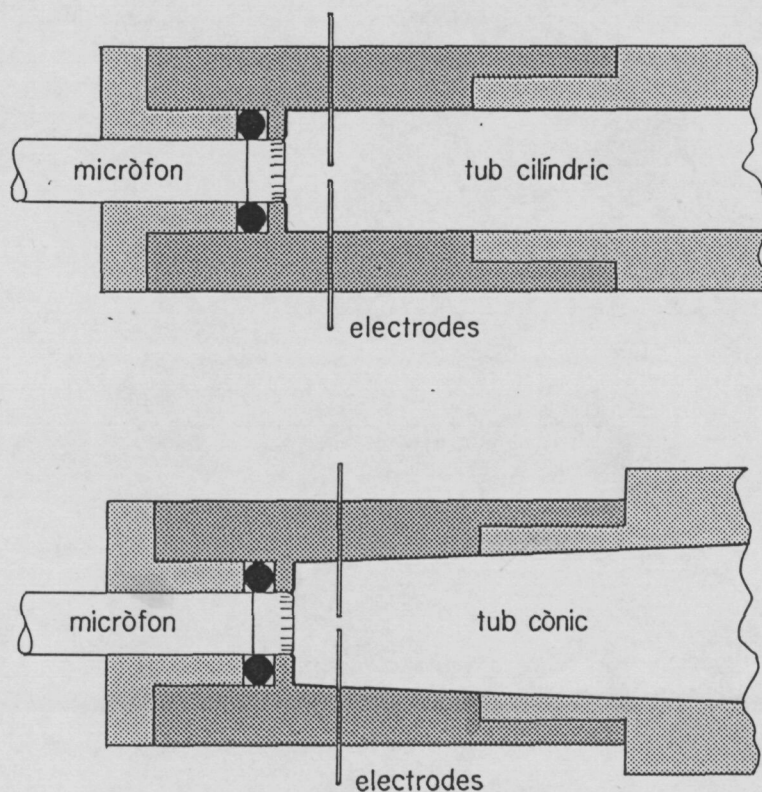


Fig. 4.3-2 Capçals emprats en la determinació experimental de la resposta impulsional de tubs cilíndrics i cònics.

ona plana a mesura que es propaga al llarg del tub i es reflecteix a les parets laterals, però degut a la proximitat entre els electodes i el micròfon, la pressió mesurada inicialment correspon encara a la d'una ona esfèrica, pressió que ve definida per un impuls positiu i una estela negativa tant més intensa quan més a prop de la font puntual es mesuri la pressió. Malgrat tot la pertorbació introduïda per aquests fets té poca incidència en la forma de la resposta.

La figura 4.3-4 mostra la resposta experimental d'un tub cilíndric anàleg a l'anterior però de 20 mm de diàmetre. S'observa com inicialment apareix una forta fluctuació de pressió d'alta freqüència que impossibilita la correcta calibració en unitats de resposta impulsional. Per aquesta raó el resultat es presenta en unitats de pressió i no es compara amb la corresponent resposta teòrica.

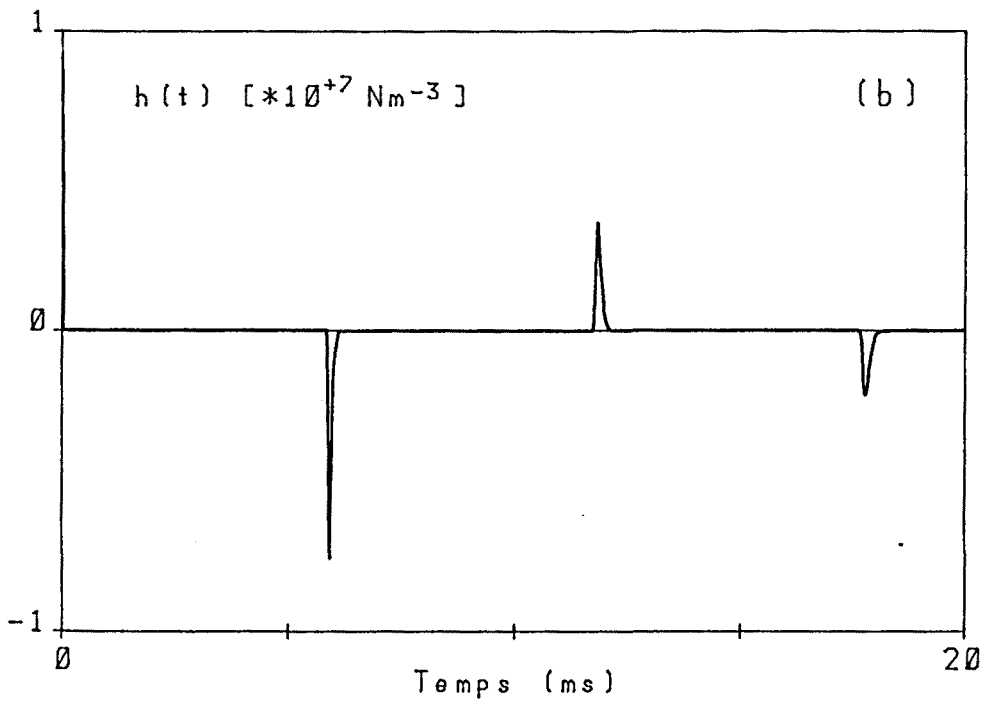
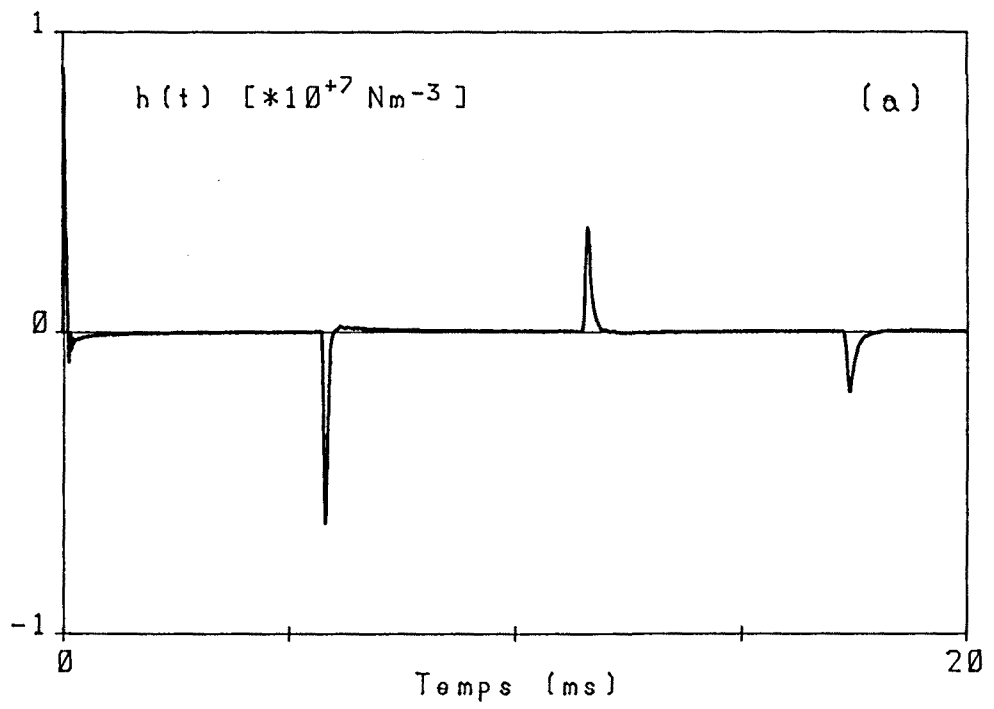


Fig. 4.3-3 Resposta impulsional d'un tub cilíndric de 10 mm de diàmetre.
(a) Resposta experimental. (b) Resposta calculada.

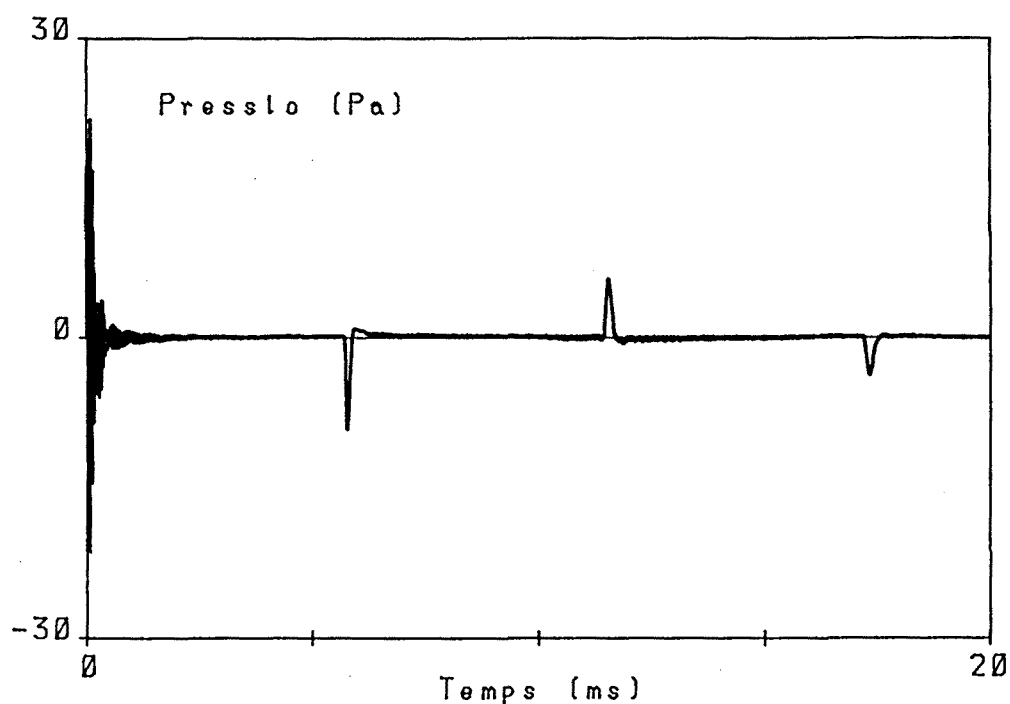


Fig. 4.3-4 Resposta experimental d'un tub cilíndric de 20 mm de diàmetre.

Aquesta fluctuació és deguda a la presència de modes transversals excitats per la descàrrega a causa del seu caràcter puntual. Els modes transversals només es propaguen longitudinalment per a freqüències superiors a les corresponents freqüències de tall de cada mode, les quals són inversament proporcionals al diàmetre del tub (Agulló 1979 a). Per a un diàmetre de 20 mm la freqüència de tall del primer mode transversal és de 20 kHz, mentre per un diàmetre de 11,7 mm és de 35,5 kHz. Com que la descàrrega no genera components harmòniques importants per sobre de 20 kHz, pràcticament no s'exciten modes transversals propagatius en el tub de diàmetre més petit, al contrari del que succeix en el tub de diàmetre més gran. Aquest fet, i la proximitat entre el micròfon i els electrodos, explica la presència de la fluctuació.

La tècnica experimental proposada és només aplicable per tant en aquells casos en que el diàmetre de la secció d'entrada és inferior a 12 mm, tal com succeeix en el tible i la tenora, instruments que presenten una secció d'entrada de 4 mm de diàmetre.

La figura 4.3-5 correspon a les respostes experimental i teòrica d'un tub cònic truncat de 81 mm de llargada, 11,7 mm de diàmetre a la secció d'entrada i 33 mm de diàmetre a la secció de sortida. De nou la semblança d'ambdues respostes és notable. En aquesta ocasió però l'estela negativa que acompanya l'impuls inicial és més intensa ja que, a part de les causes abans esmentades, cal considerar el fet que el tub és cònic, i per tant que les ones que es propaguen en el seu interior són esfèriques. Per aixó, i tal com s'observa a la resposta calculada, la pressió de l'ona inicial ja de per sí presenta la depressió característica de les ones esfèriques.

A la resposta experimental també s'observa una atenuació més accentuada que la observada a la resposta teòrica. Aixó indica que les resistències passives vertaderes són més elevades que les considerades en el càlcul, les quals han estat avaluades a partir d'assaigs experimentals realitzats per S. Cardona referents a tubs cilíndrics metàl·lics (Cardona 1980). L'acabat més bast de la superfície interior del tub de fusta comparat amb el d'un tub metàl·lic és la causa principal de la presència d'un esmorteïment més elevat.

Finalment la figura 4.3-6 mostra les respostes experimental i teòrica d'un tub cònic de fusta amb un tudell de tenora. Les dimensions del conjunt es mostren a la mateixa figura. La comparació d'ambdues respostes mostra altre cop una discrepància pel que fa a la magnitud de l'estela negativa inicial. Les mateixes raons esmentades anteriorment són aplicables en aquest cas. També s'observa una atenuació més important en la resposta experimental en front de la calculada.

Com a valoració final de la tècnica experimental que s'ha presentat es pot dir que si bé l'obtenció de la resposta impulsional a partir de l'impuls de cabal produït per una descàrrega elèctrica presenta limitacions, la comparació dels resultats experimentals amb els teòrics a nivell qualitatiu és satisfactòria. La millora del mètode passa per la utilització d'un tipus d'excitador que elimini les limitacions de la descàrrega. Un actuador piezoelèctric o electrostàtic permetria obtenir un impuls de cabal més nítid i generar ja inicialment una ona plana, encara que la implementació d'un actuador d'aquest tipus és més complexa i laboriosa que la dels electrodes del sistema basat en la descàrrega.

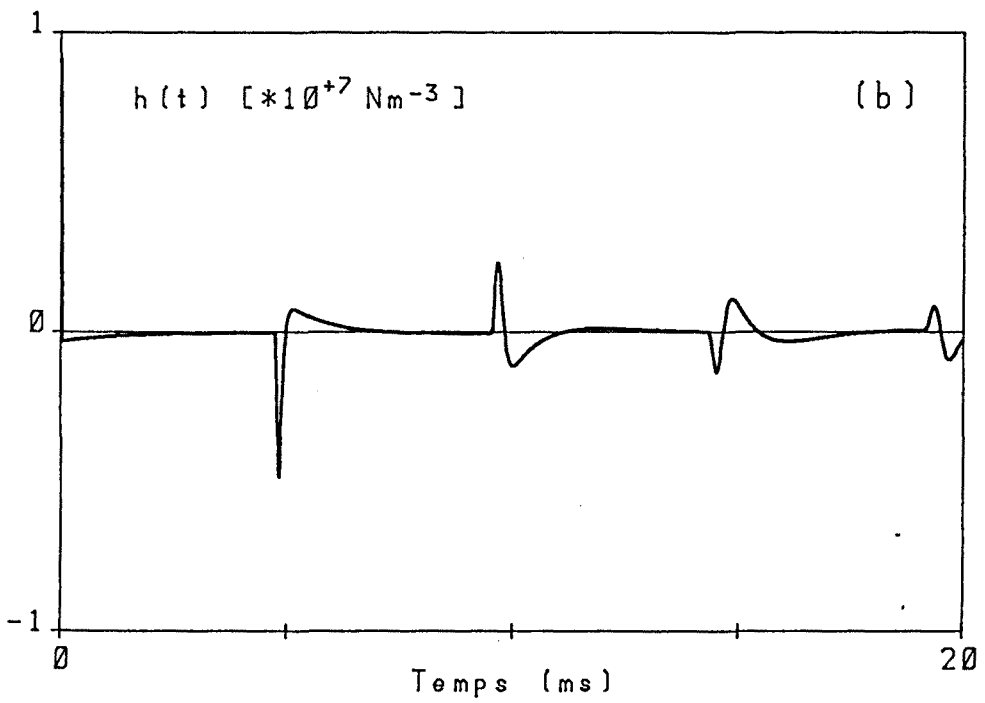
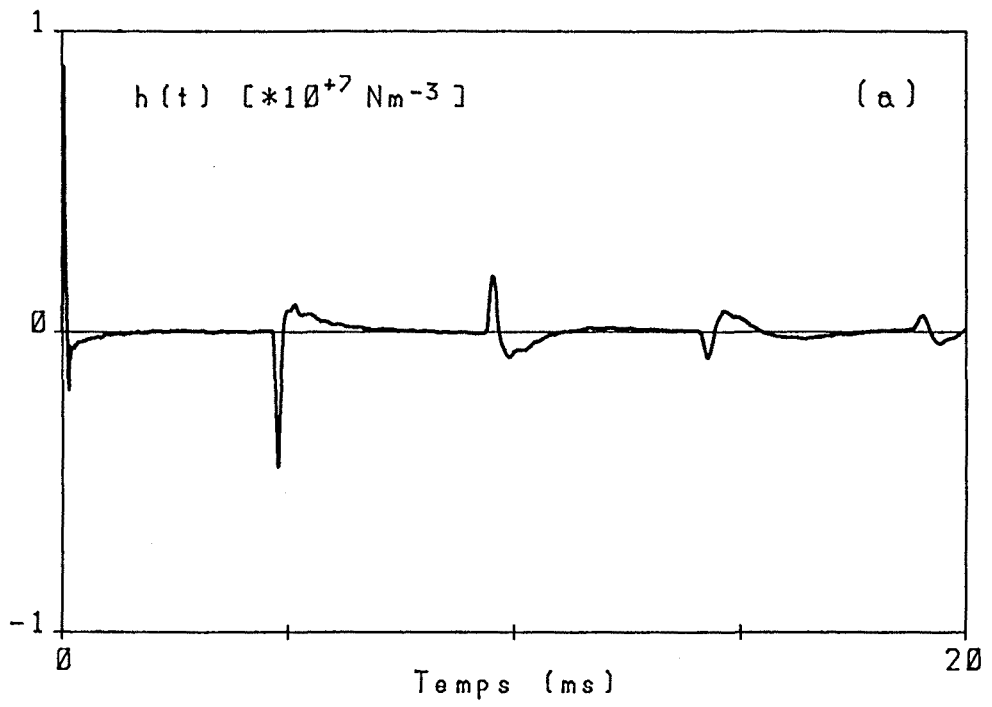


Fig. 4.3-5 Resposta impulsional d'un tub cònic truncat.
 (a) Resposta experimental. (b) Resposta calculada.

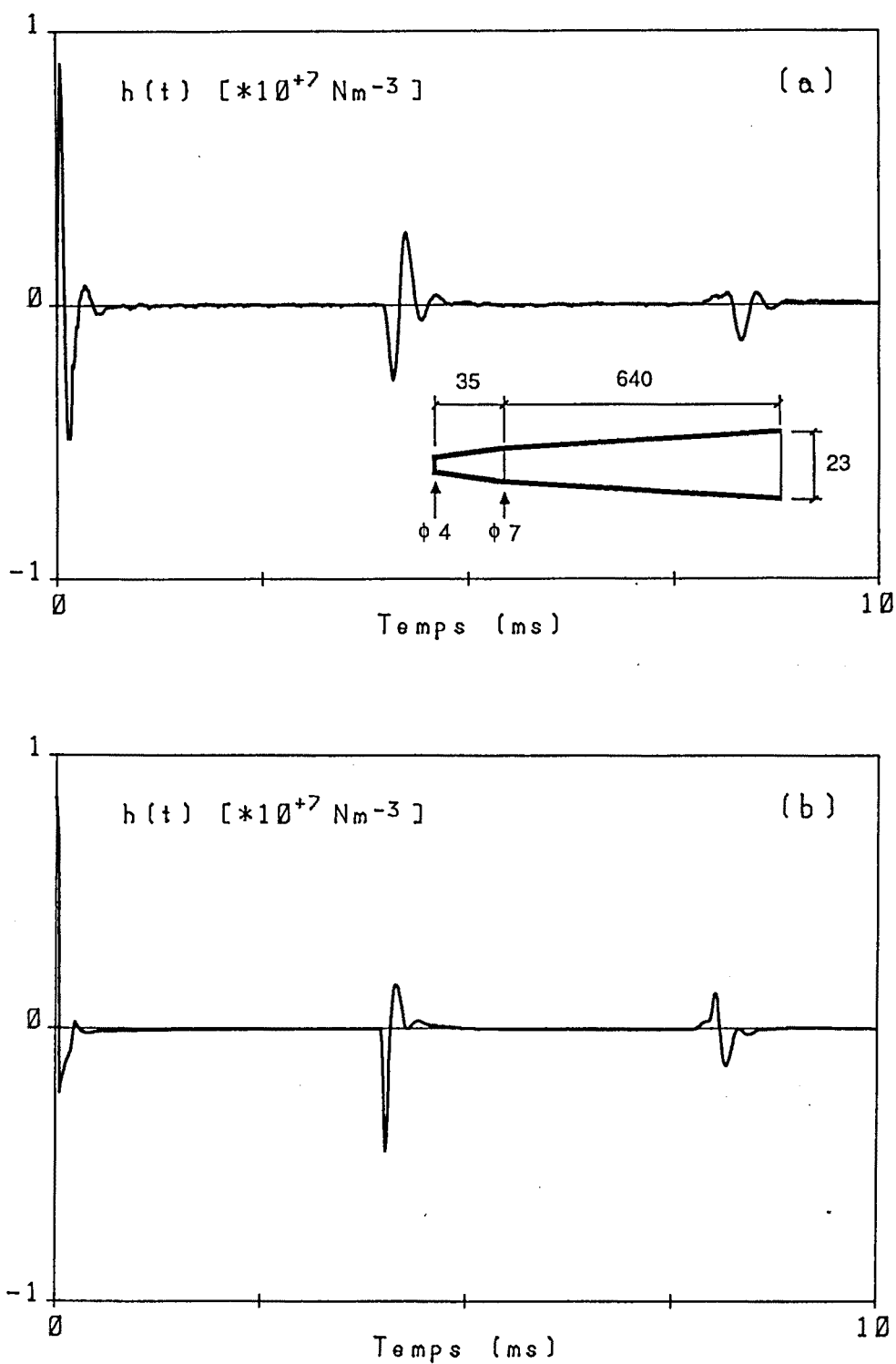


Fig. 4.3-6 Resposta impulsional d'un tub cònic truncat amb un tudell.
(a) Resposta experimental. (b) Resposta calculada.

4.4. ELS RESULTATS EXPERIMENTALS. PRESENTACIÓ I ANÀLISI.

Mitjançant la tècnica experimental presentada en aquest capítol s'han enregistrat les respostes impulsional de tibles i tenores corresponents a les digitacions de diferents notes. Els resultats es presenten en unitats de resposta impulsional -Nm^{-3} - i l'escala temporal s'estén fins els 10 ms de durada, temps suficient per poder observar fins la primera reflexió provinent de l'extrem obert.

La calibració s'ha realitzat emprant la impedància característica del medi en condicions normals de pressió i temperatura -10^5 Pa i $15 \text{ }^\circ\text{C}$ -. Si bé els enregistraments s'han obtingut sempre a les condicions ambientals del moment, la variació de la impedància característica en funció de la pressió i la temperatura afecta poc la magnitud de la resposta impulsional. Així, a una pressió de 10^5 Pa la variació de Z_0 entre 5 i $25 \text{ }^\circ\text{C}$ és del 3,5 %. A més l'anàlisi de la resposta impulsional, realitzat només a nivell qualitatiu, no es veu afectat pel valor de Z_0 .

En els resultats s'han senyalat quines són les reflexions més importants que s'observen a les respostes, així com les discontinuïtats on es produeixen. La identificació de l'origen de les reflexions s'ha realitzat per mitjà de la determinació del temps que tarda una ona en recorre dos cops la distància existent entre l'extrem d'entrada, on es troba localitzat el micròfon, i la secció on es situa la discontinuïtat, temps que senyala aproximadament l'arribada a l'extrem d'entrada de la primera reflexió produïda a la discontinuïtat.

Encara que les respostes s'han enregistrat a diferents temperatures ambientals, en la determinació d'aquests temps s'ha emprat la celeritat de propagació del so en l'aire a $15 \text{ }^\circ\text{C}$ -340 ms^{-1} - indistintament per a tots els casos, ja que la variació de la celeritat del so amb la temperatura és suficientment petita com per negligir l'error introduït en prendre un valor constant. -La variació de c entre 5 i $25 \text{ }^\circ\text{C}$ és també del 3,5 %-.

Les discontinuïtats que produeixen les reflexions més importants, així com la notació emprada per a definir les corresponents localitzacions en les respostes impulsional, són les següents:

L'extrem obert, per al qual s'empra la notació "eo".

La unió del pavelló amb el cos central de l'instrument, unió en la qual hi ha una discontinuïtat de diàmetre. Es denomina amb la notació "P".

La unió entre el cos central i el cos superior, unió que pot presentar una discontinuïtat del mateix tipus que l'anterior. Rep la denominació "J".

La unió del tudell amb el cos superior de l'instrument, unió en la qual es presenta un canvi de conicitat important, acompanyat sovint d'una cavitat anular originada per imperfeccions constructives. Rep la denominació "T".

I finalment els forats oberts corresponents a la digitació de la nota. Els forats es numeren d'acord amb les taules de digitació del tible i la tenora mostrades al capítol 1 -taules 1.1-I i 1.1-II -.

Les respostes impulsional de la tenora.

S'han enregistrat les respostes impulsional de dues tenores provinents del constructor Pardor de la Bisbal. Una és de començaments de segle i l'altra és de construcció recent.

Les notes per a les quals s'ha obtingut la resposta impulsional són les següents: La nota $Fa_2^\#$, nota que s'obté amb tots els forats de l'instrument tapats. Les notes Do_3 , Fa_3 i Do_4 del primer registre. I la nota Fa_4 del segon registre, que s'obté amb la mateixa digitació que la nota Fa_3 però obrint el primer forat de registre -forat nº 19'-.

La figura 4.4-1 mostra les respostes impulsional de la nota $Fa_2^\#$ per ambdues tenores. Les respostes s'inicien amb un fort impuls seguit d'una depressió negativa també important. Aquestes dues fluctuacions conformen l'ona inicial de pressió produïda per la descàrrega, la qual és anàloga a la que s'observa a la figura 4.3-6 -resposta impulsional d'un tub cònic amb tudell-.

La primera reflexió que s'observa a les respostes correspon a la reflexió produïda en la unió del tudell amb el cos superior de l'instrument -localització "T"- i va seguida d'una sèrie de reflexions menors que corresponen a les successives reflexions generades al mateix indret. La tenora Pardo antiga presenta una forta reflexió a la localització "J", la qual correspon a la unió del

cos superior amb el cos central, i que no s'observa a la tenora Pardo actual. En inspeccionar els dos cossos de la Pardo antiga es va constatar la presència d'una discontinuïtat de secció important ocasionada pel desgast de l'espiga d'unió, discontinuïtat que tal com es comprovarà al capítol següent provoca una reflexió intensa. Aquest desgast no s'ha observat a la tenora Pardo actual.

En les respostes d'ambdues tenores també apareix una reflexió deguda a la unió del pavelló amb el cos central -localització "P"-. Aquesta unió presenta un canvi sobtat de diàmetre -de l'ordre de 2 mm- i com a conseqüència genera també una reflexió important. La reflexió però apareix menys intensa que la produïda a la localització "J" ja que en arribar a l'extrem d'entrada ha estat atenuada per les diverses reflexions que han tingut lloc prèviament.

La reflexió anomenada "eo" correspon a la de l'extrem obert. Aquesta reflexió es presenta retardada respecte de la localització que teòricament li pertocaria -equivalent al temps que tarda el so en recorre dos cops la longitud de l'instrument- degut a que la impedància acústica de la columna d'aire a l'extrem obert, Z_{eo} , no és nul·la.

En el cas hipotètic en que $Z_{eo}=0$ l'energia radiada cap a l'exterior seria nul·la, i també ho seria la pressió a la secció de sortida. D'acord amb la descripció freqüencial del règim estacionari, s'establiria una successió de modes longitudinals, tots ells amb la particularitat que presentarien un node de pressió a l'extrem obert. D'acord amb la descripció temporal que proporciona la resposta impulsional, la reflexió produïda a l'extrem obert seria total, reflectint-se una ona igual a la incident però de signe oposat -capítol 5, apartat 5.6-.

En ser $Z_{eo} \neq 0$, la pressió a l'extrem no és nul·la. Segons la descripció freqüencial, els nodes de pressió de cada mode es desplacen cap enfora del tub de l'instruments, i per tant les freqüències pròpies són més baixes. En primera aproximació, i per tal de determinar les freqüències pròpies de cadascun dels modes, s'empra el concepte de correcció d'extrem, que consisteix en afegir a la longitud física del tub una correcció de llargària definida d'acord amb la localització del node de pressió. En la descripció temporal, el fet que $Z_{eo} \neq 0$ es tradueix tant en la variació de la forma de l'ona reflectida com en el retard que s'observa en les dues respostes experimentals.

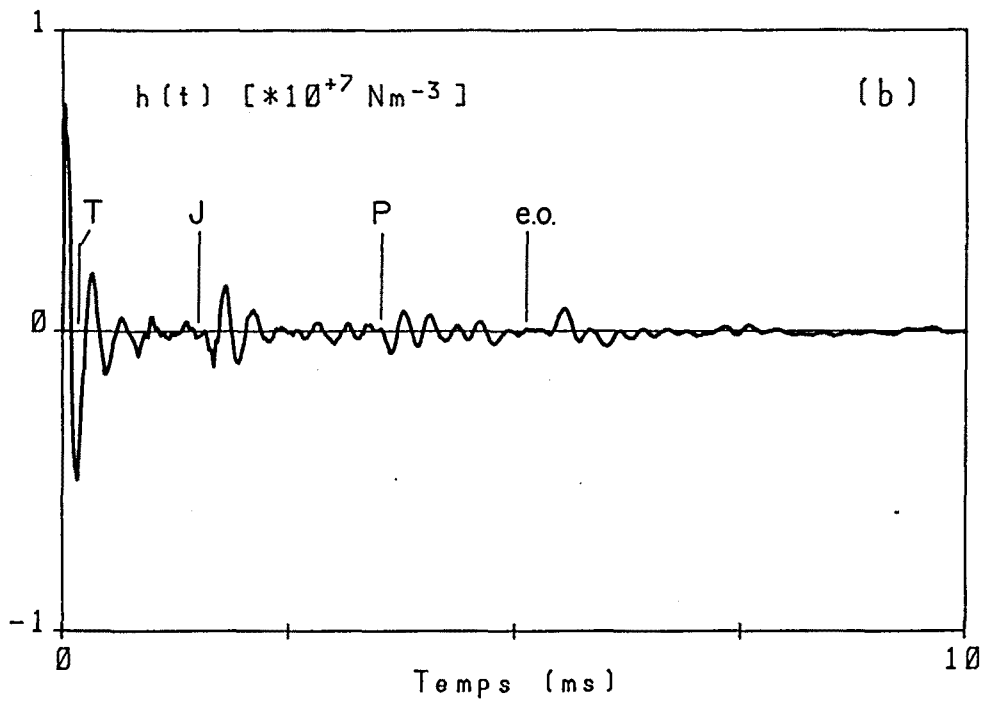
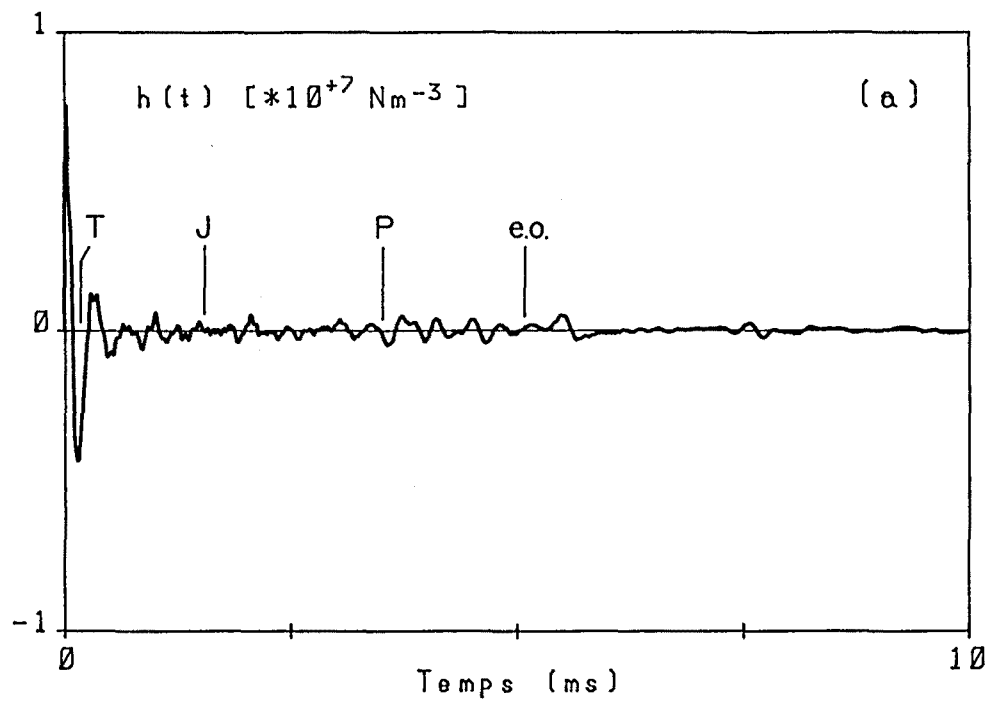


Fig. 4.4-1 Resposta impulsional de la nota $Fa_2^\#$ de la tenora.
(a) Tenora Pardo actual. (b) Tenora Pardo antiga.

Les figures 4.4-2 i 4.4-3 mostren respectivament les respostes impulsional de les notes Do_3 i Do_4 per ambdues tenores. En elles s'observa com apareix una reflexió acusada en la localització corresponent al forat obert més proper a l'extrem d'entrada, forat que determina l'afinació de la nota a executar. Les reflexions que segueixen a aquesta són les successives reflexions que es van produint en la resta de forats oberts i a l'extrem obert. La identificació del seu origen es veu però molt dificultada per causa del gran nombre de reflexions que es van superposant a mesura que avança el temps. Per a la tenora Pardo antiga s'observa de nou la forta reflexió que es produeix a la unió entre els cossos superior i central.

A la figura 4.4-4 es comparen les respostes impulsional de les notes Fa_3 i Fa_4 de la tenora Pardo actual, i a la figura 4.4-5 es fa el mateix per a la tenora Pardo antiga. La nota Fa_4 , del segon registre, s'obté amb la mateixa digitació que la nota Fa_3 obrint el primer forat de registre dels dos que disposa la tenora -forat nº 19'- . Per a les dues tenores s'observa que les respostes d'ambdues notes són pràcticament iguals, presentant-se una lleugera diferència en la localització corresponent al forat de registre. La causa d'aixó cal buscar-la en el petit diàmetre del forat -2 mm- que fa que la reflexió provocada sigui de poca intensitat i per tant no modifiqui sensiblement la forma de la resposta impulsional.

Al capítol 6, dedicat a l'estudi de l'espontaneïtat, s'analitza amb detall la funció dels forats de registre i la tècnica emprada per l'instrumentista per passar del primer al segon registre.

Les respostes impulsional del tible.

Les respostes impulsional del tible que es presenten corresponen a dos instruments provinents també del constructor Pardo. El primer, el qual s'ha anomenat Pardo-1, és l'instrument pertanyent a J. Macià, i el segon, Pardo-2, és l'instrument de F. Benítez. Ambdós instruments són els emprats en l'estudi dels atacs. Les notes que s'han considerat són: La nota La_2 que s'obté amb tots els forats tapats, excepte els quatre forats situats al pavelló que romanen sempre oberts. Les notes Mi_3 i Sol_3 del primer registre. I les notes Re_4 i Sol_4 del segon registre.

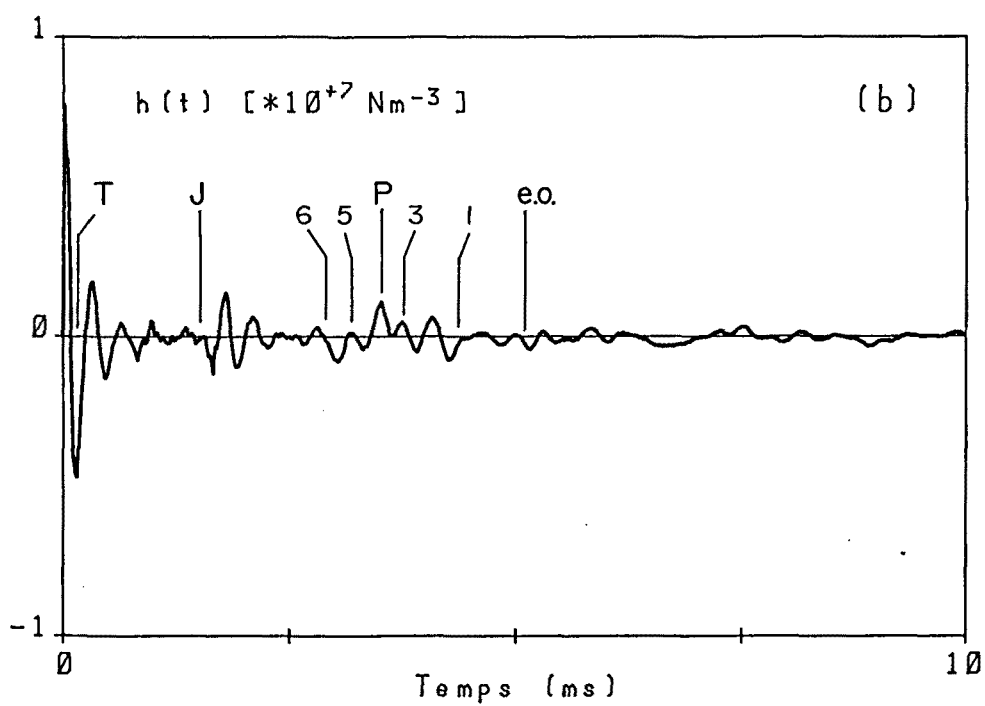
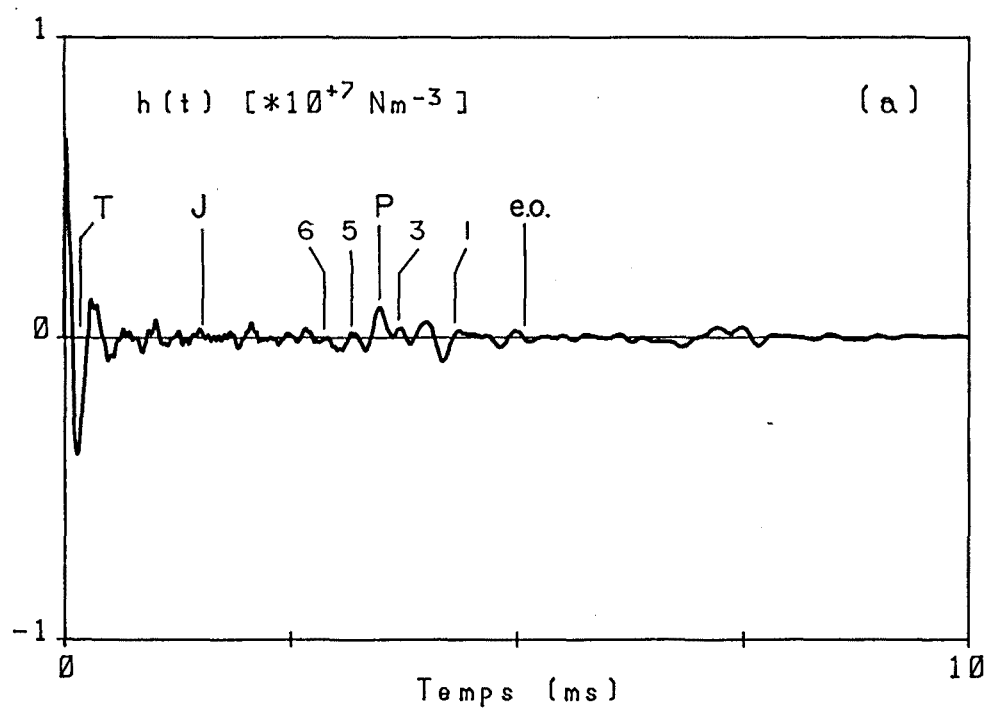


Fig. 4.4-2 Resposta impulsional de la nota Do_3 de la tenora.
 (a) Tenora Pardo actual. (b) Tenora Pardo antiga.

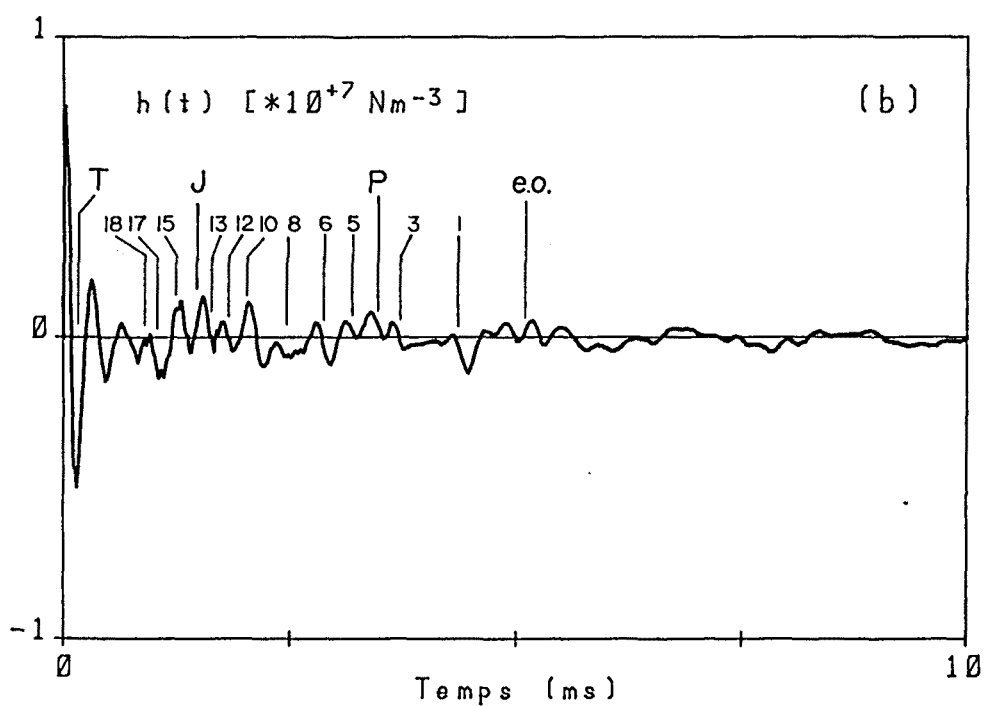
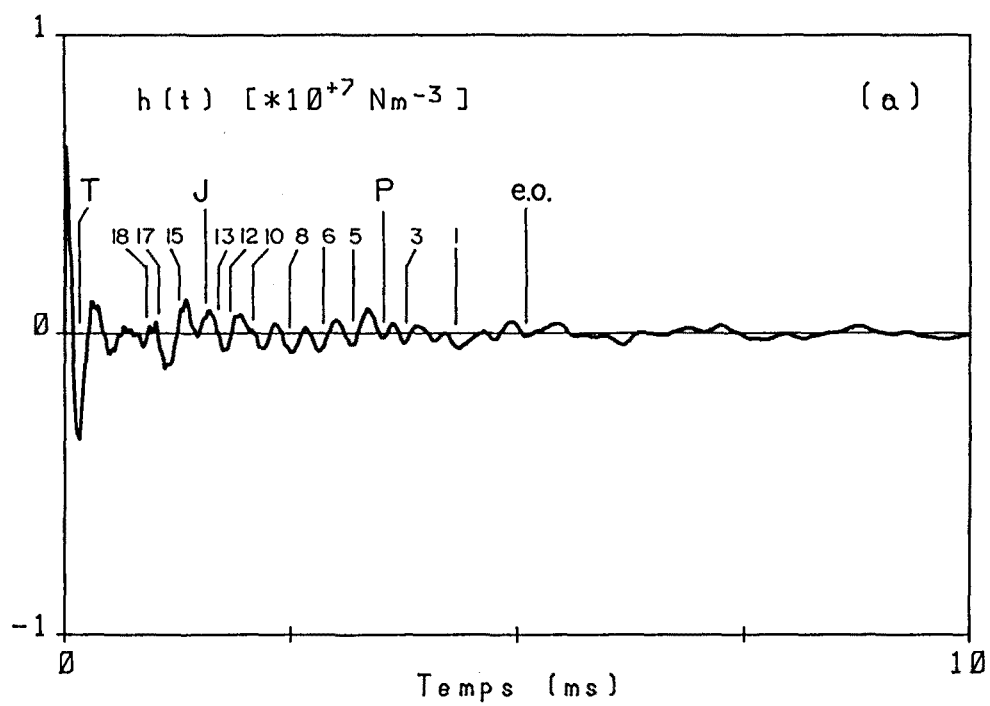


Fig. 4.4-3 Resposta impulsional de la nota Do_4 de la tenora.
(a) Tenora Pardo actual. (b) Tenora Pardo antiga.

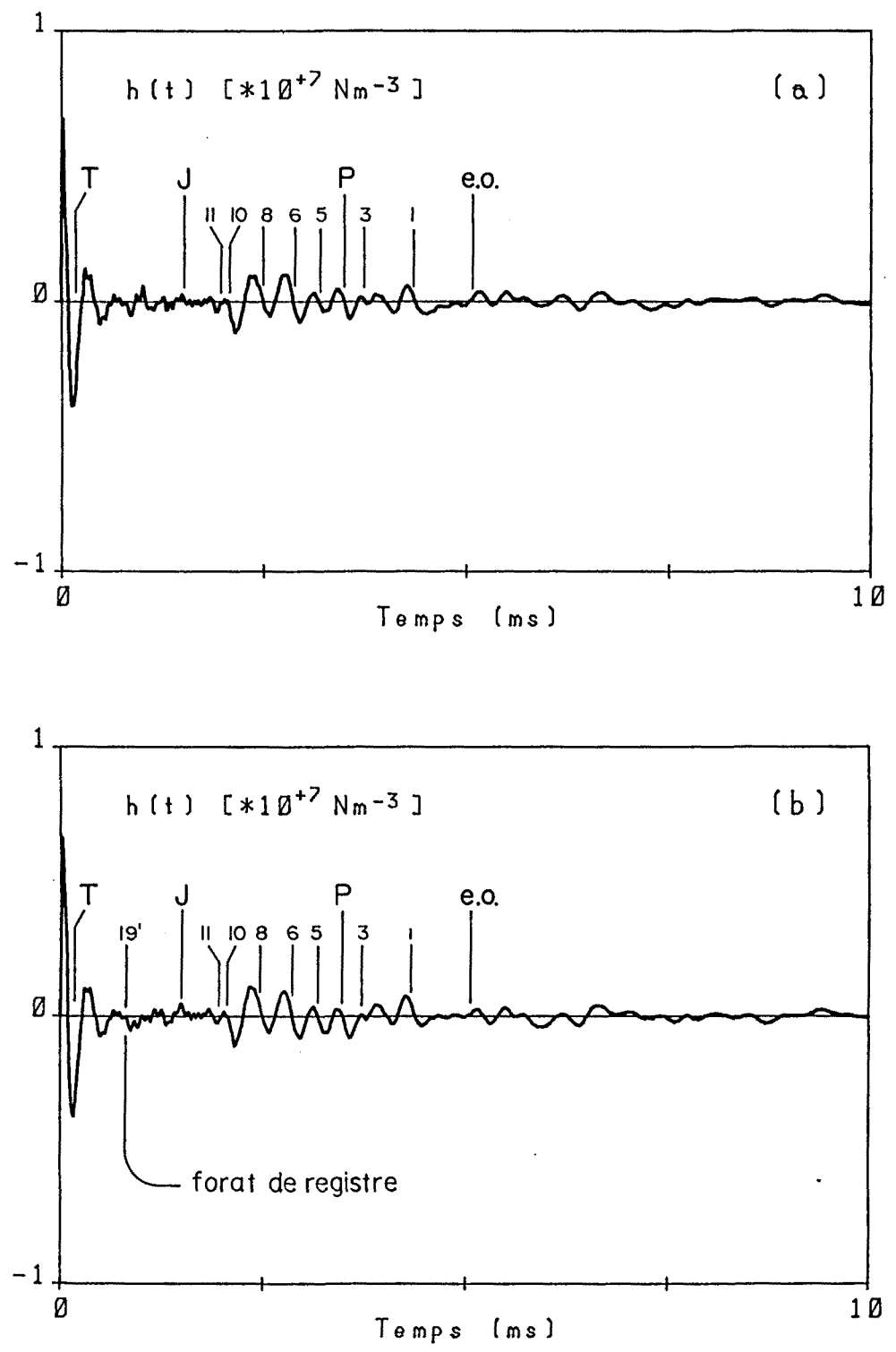


Fig. 4.4-4 Respostes impulsional de la tenora Pardo actual.
(a) Nota Fa_3 -primer registre-. (b) Nota Fa_4 -segon registre-.

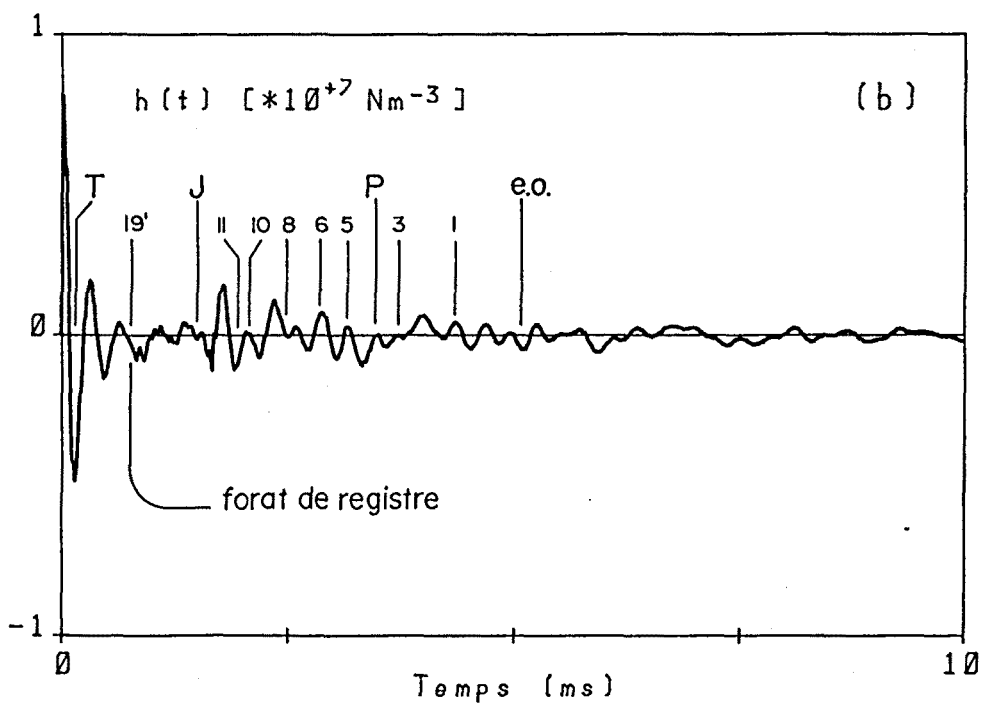
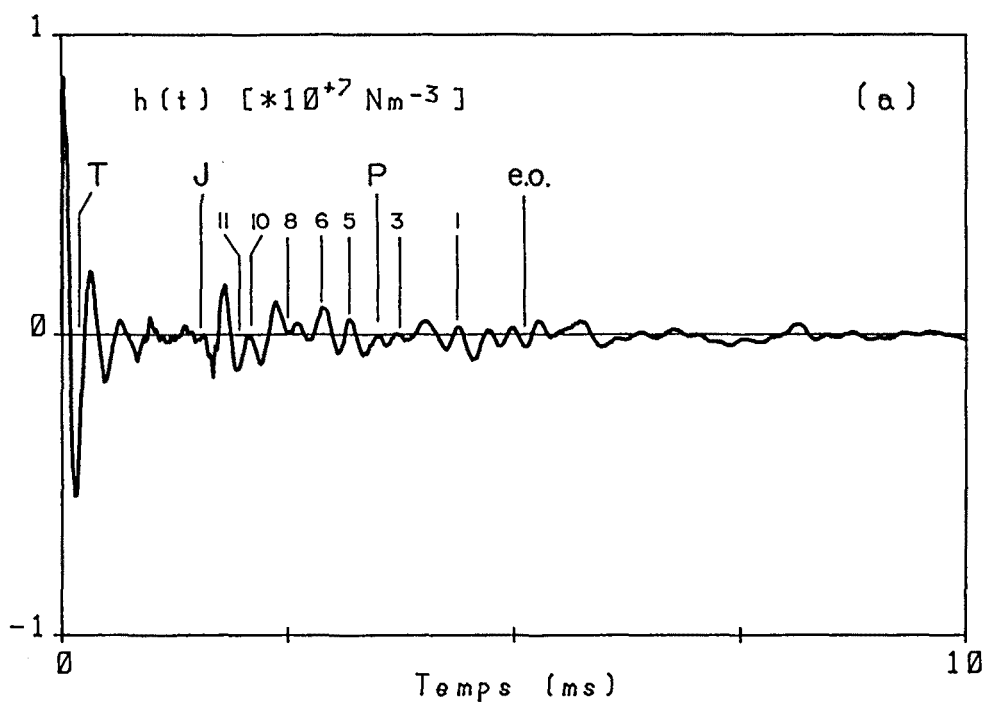


Fig. 4.4-5 Respostes impulsional de la tenora Pardo antiga.
 (a) Nota Fa_3 -primer registre-. (b) Nota Fa_4 -segon registre-.

La figura 4.4-6 mostra les respostes impulsional de la nota La_2 per ambdós tibles. A l'igual que en les tenores s'observa com les respostes impulsional del tible començen amb l'ona inicial de pressió generada per la descàrrega, seguida de la primera reflexió produïda en la unió del tudell amb l'instrument -reflexió "T"- . En les dues respostes també s'observa una primera reflexió important que té el seu origen en els forats 3 i 4 del pavelló, localitzats pràcticament a la mateixa secció, seguida d'una sèrie de reflexions produïdes als forats 1 i 2 i a l'extrem obert. D'aquestes reflexions no se'n pot conèixer amb certesa l'origen ja que són el resultat de superposar una successió d'ones reflectides entre els forats i l'extrem obert. Finalment cal esmentar la presència d'una reflexió apreciable a la unió del cos superior amb el cos central de l'instrument, més accentuada en el tible Pardo-2. La causa d'aquesta reflexió, a l'igual que succeïa en les tenores, és la presència d'una discontinuïtat de diàmetre a la secció d'unió -de l'ordre de 1 mm-.

Les figures 4.4-7 i 4.4-8 corresponen respectivament a les respostes impulsional de les notes Mi_3 i Re_4 respectivament, per als dos tibles. En la resposta de la nota Mi_3 del tible Pardo-1 s'observa una forta reflexió originada al darrer forat obert -forat nº 12-. Aquest forat, de 13 mm de diàmetre, és el més gros d'entre tots els forats d'afinació del tible, per la qual cosa la seva reflexió és la més intensa. En la resposta de la mateixa nota del tible Pardo-2, la reflexió és menys important en el forat nº 12 d'aquest instrument, de diàmetre més petit. En la nota Re_4 el darrer forat obert és el nº 10 , amb un diàmetre de 10 mm, i s'observa en les dues respostes que la reflexió que provoca és del mateix ordre que la provocada a la unió del cos superior amb el cos central. El fet que les dues reflexions siguin properes pot crear dificultats pel que fa a l'espontaneïtat de l'instrument, tal com s'analitza al capítol 6.

Finalment a les figures 4.4-9 i 4.4-10 es comparen les respostes impulsional de les notes Sol_3 i Sol_4 per als dos tibles respectivament. La nota Sol_4 s'obté amb la mateixa digitació que la nota Sol_3 però destapant el primer forat de registre del tible -forat nº 21'- . A l'igual que succeïa amb les respostes impulsional de la tenora, i degut a les reduïdes dimensions del forat, les respostes per ambdues notes són pràcticament iguals.

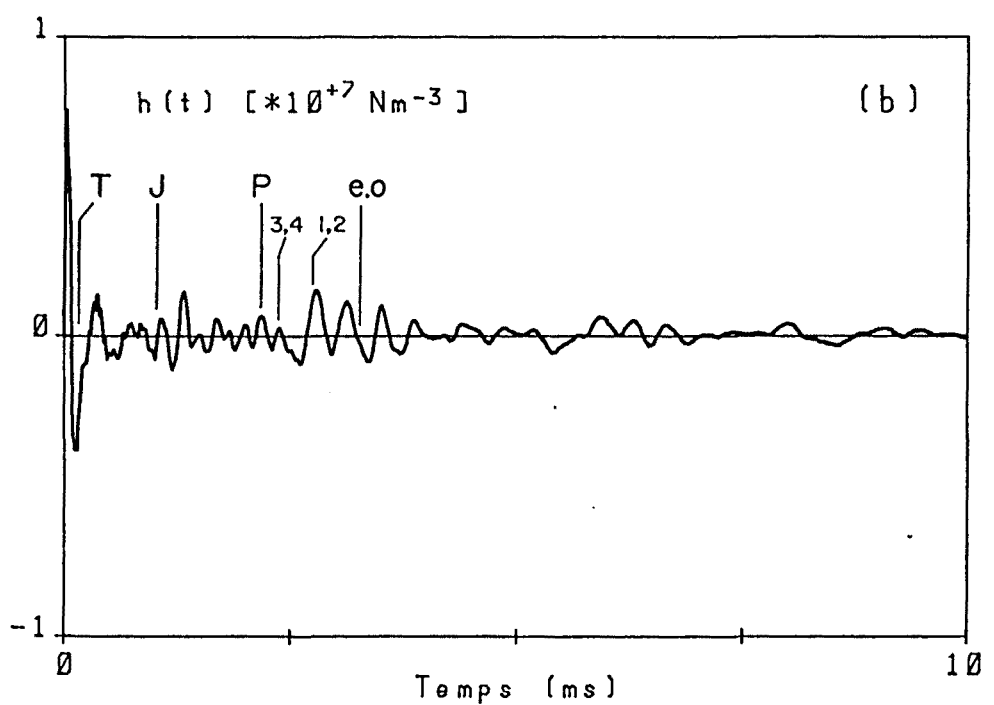
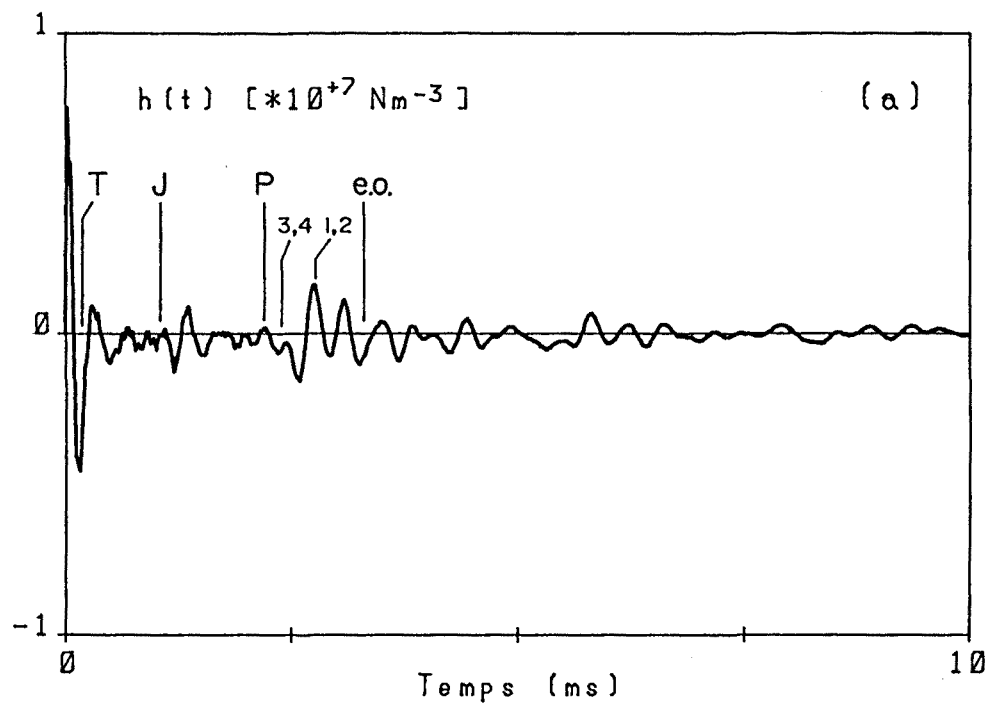


Fig. 4.4-6 Resposta impulsional de la nota La_2 del tible.
(a) Tible Pardo-1. (b) Tible Pardo-2.

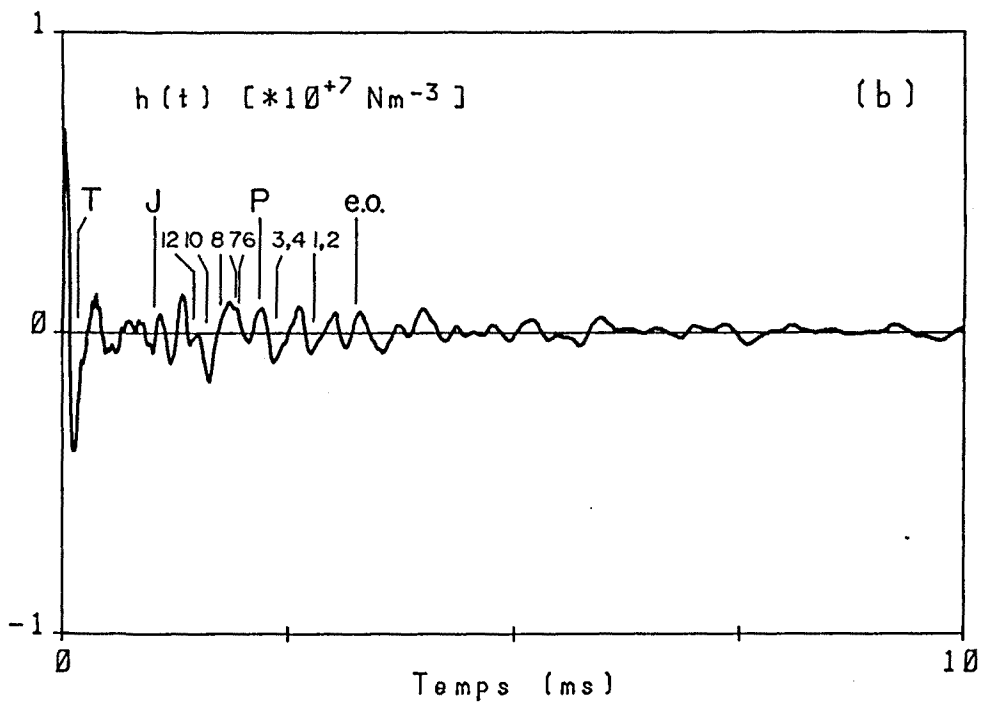
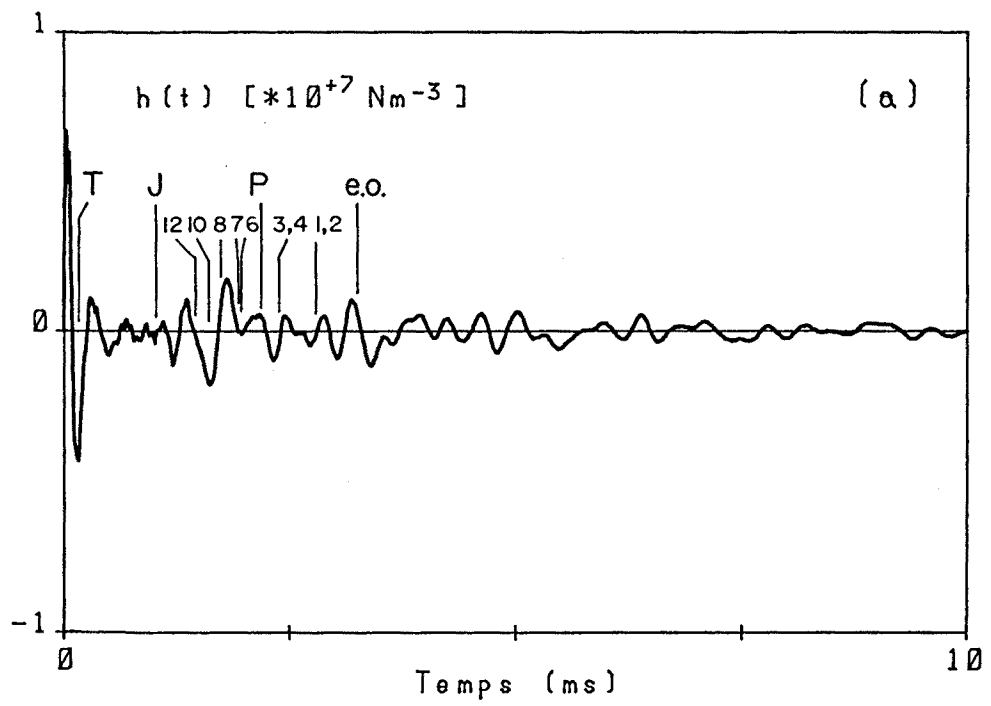


Fig. 4.4-7 Resposta impulsional de la nota Mi_3 del tible.
(a) Tible Pardo-1. (b) Tible Pardo-2.

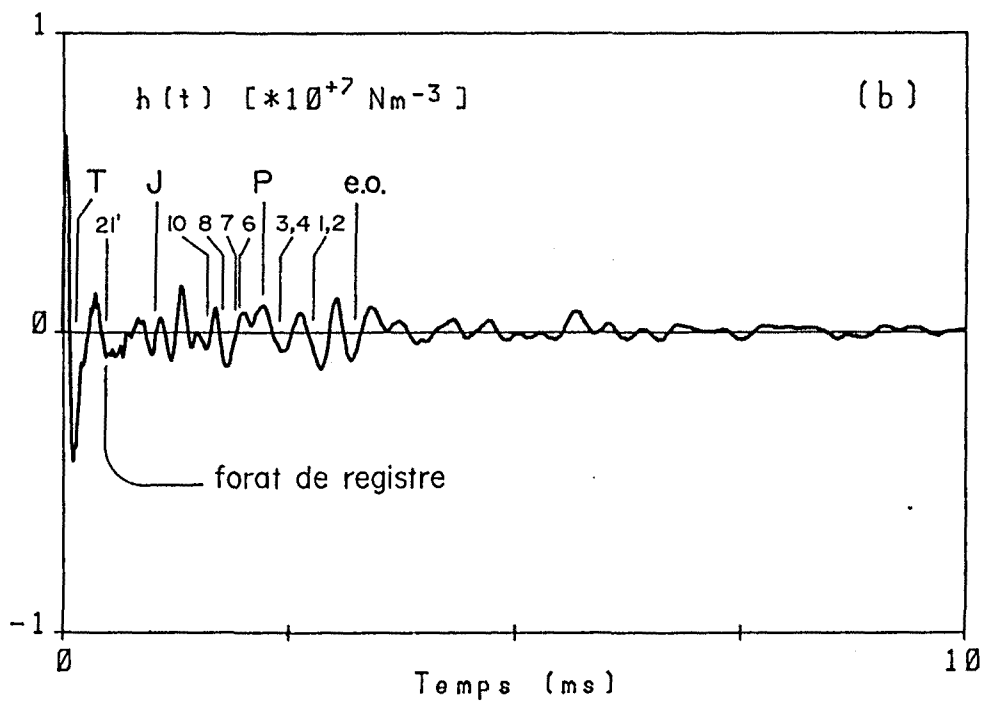
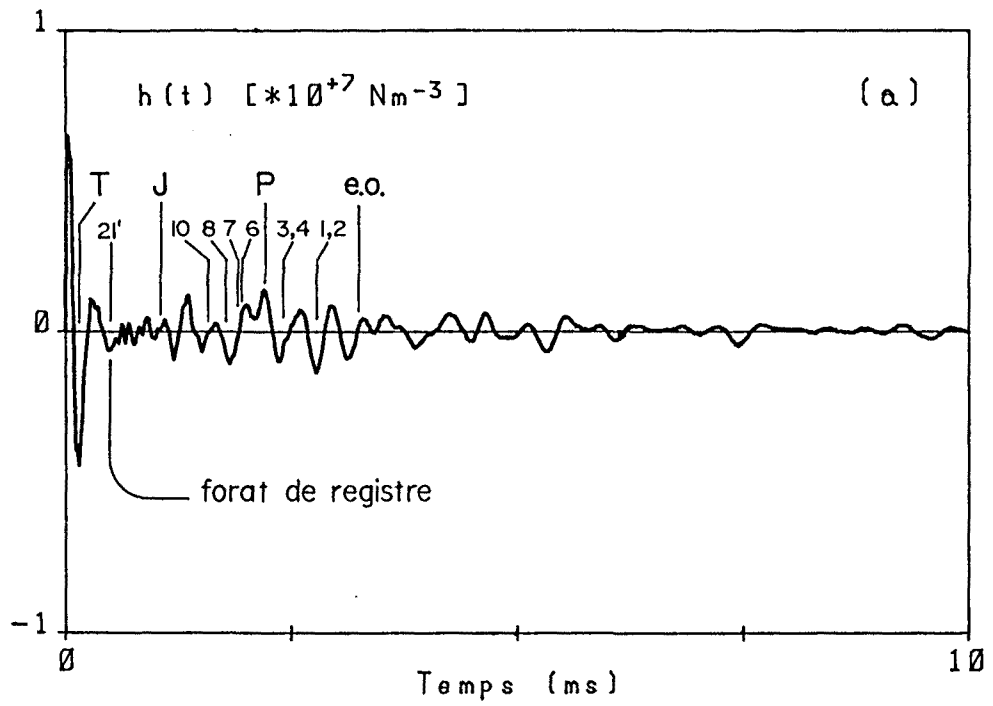


Fig. 4.4-8 Resposta impulsional de la nota Re_4 del tible.
(a) Tible Pardo-1. (b) Tible Pardo-2.

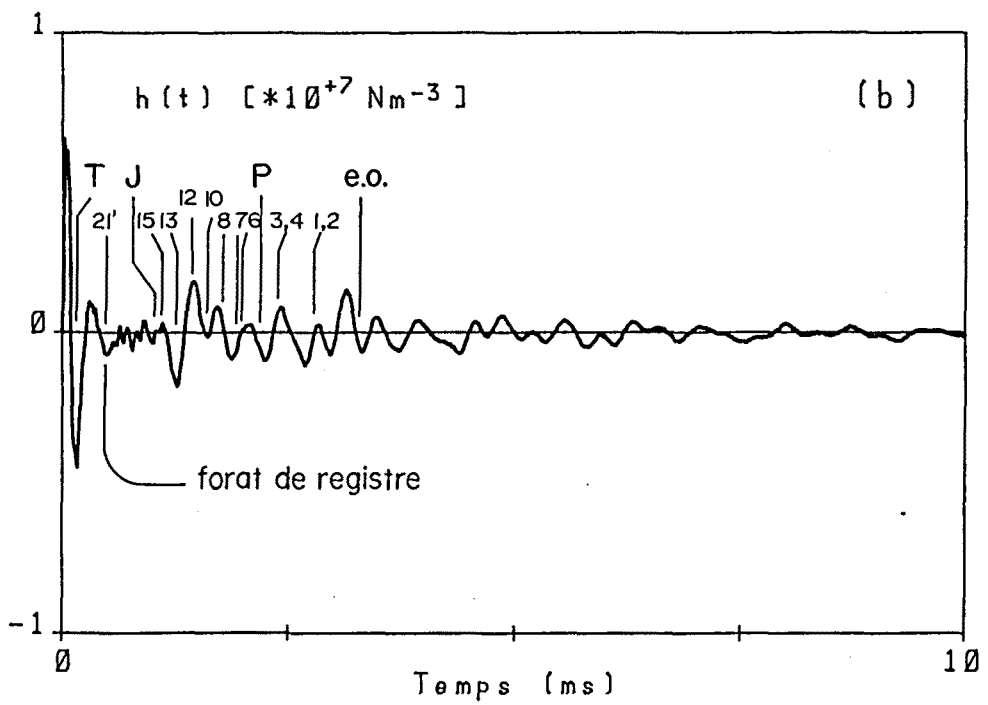
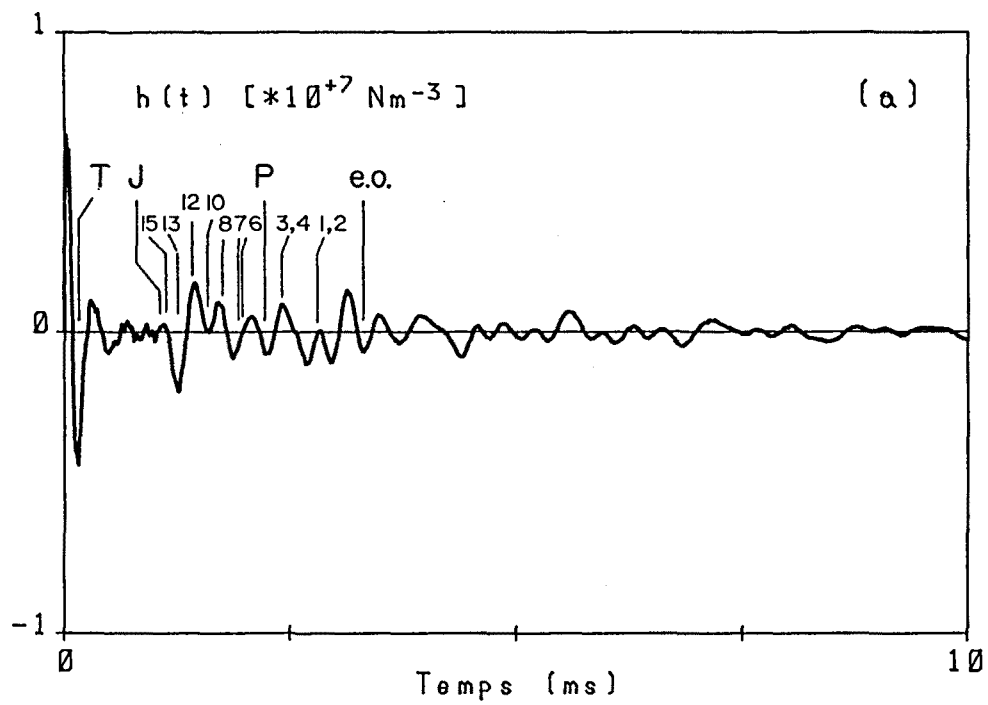


Fig. 4.4-9 Respostes impulsional per al tible Pardo-1.

(a) Nota Sol₃ -primer registre-. (b) Nota Sol₄ -segon registre-.

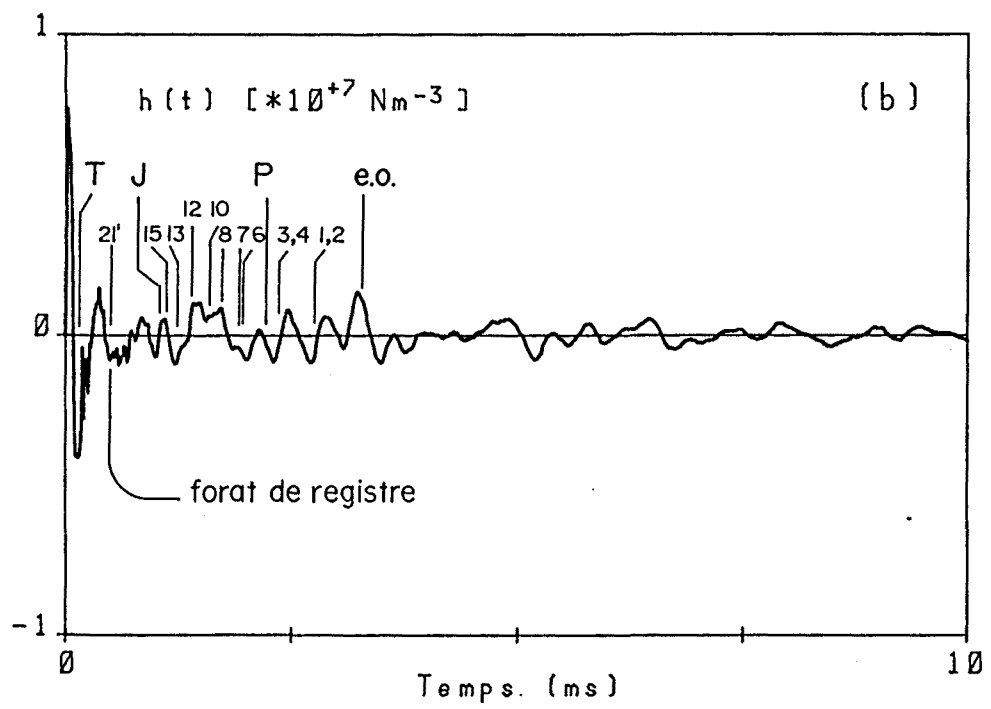
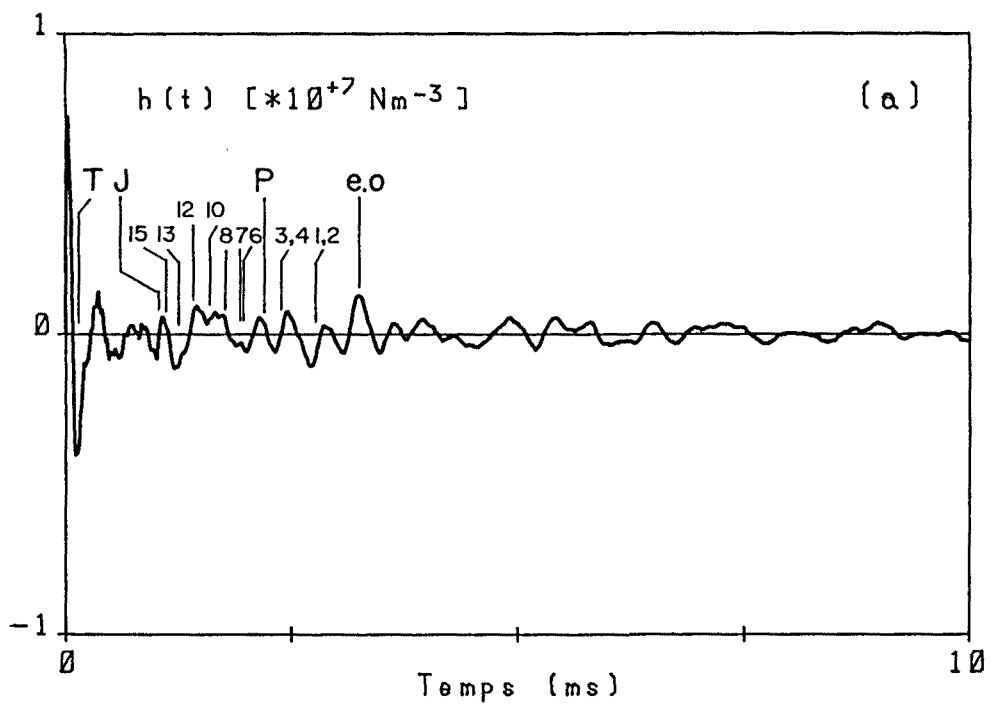


Fig. 4.4-10 Respostes impulsional per al tible Pardo-2.

(a) Nota Sol₃ -primer registre-. (b) Nota Sol₄ -segon registre-.

4.5. CONCLUSIONS DELS RESULTATS EXPERIMENTALS.

L'anàlisi dels resultats presentats a l'apartat anterior condueix a les següents conclusions:

La forma de les respostes impulsional de les dues tenores assajades coincideix notablement, presentant-se només diferències locals atribuïbles a petites variacions en les dimensions geomètriques. El mateix s'observa en comparar les respostes impulsional dels dos tibles.

S'ha comprovat que la reflexió principal observada a les respostes correspon a la del darrer forat obert. Aquesta reflexió té un paper important en l'establiment del mecanisme d'autoexcitació i d'ella en depèn en gran manera l'espontaneïtat de l'instrument.

La reflexió produïda a l'extrem obert que s'observa en la nota $Fa_2^\#$ de les tenores -en l'execució de la qual tots els forats són tapats- es poc intensa. Això dificulta l'establiment del mecanisme d'autoexcitació i per tant l'execució d'aquesta nota, fet reconegut pels instrumentistes de tenora.

Les discontinuïtats que s'han detectat en la unió del cos superior amb el cos central, així com en la unió d'aquest darrer amb el pavelló, generen reflexions importants que poden afectar el funcionament de l'instrument pel que fa a la seva espontaneïtat. Pensant en introduir millores en el disseny del tible i de la tenora, un aspecte a considerar fora el de millorar la precisió a l'hora de definir les dimensions i les toleràncies de mecanització de les unions per tal d'eliminar aquestes discontinuïtats.

Per últim cal destacar la magnitud de les reflexions que provoca el tudell. Aquestes juguen un paper important en la caracterització tímbrica del tible i de la tenora ja que generen components harmòniques de freqüència elevada molt pròpies del so emès per aquests instruments, i que poden ser un factor decisiu en la diferenciació tímbrica entre els instruments construïts en diapasó brillant i els construïts en diapasó normal.

5. DETERMINACIÓ TEÒRICA DE LA RESPOSTA IMPULSIONAL. MÈTODE DE LA MULTICONVOLUCIÓ.

5.1. PLANTEJAMENT I OBJECTIUS.

5.2. DETERMINACIÓ DE LES FUNCIONS DE REFLEXIÓ GENERALS.

- . Cas dels tubs cilíndrics.
- . Cas dels tubs cònics.

5.3. REFLEXIÓ DEGUDA A UN CANVI DE DIÀMETRE.

5.4. REFLEXIÓ DEGUDA A UN CANVI DE CONICITAT.

5.5. REFLEXIÓ EN UN EXTREM TANCAT.

5.6. REFLEXIÓ EN UN EXTREM OBERT.

- . Extrem obert en un tub cilíndric.
- . Extrem obert en un tub cònic.

5.7. REFLEXIÓ DEGUDA A UN FORAT OBERT.

5.8. REFLEXIÓ DEGUDA A UN FORAT TAPAT.

5.9. FUNCIO D'ESMORTEÏMENT.

- . Cas de tubs cilíndrics.
- . Cas de tubs cònics.

5.10. SÍNTESI DE LA RESPOSTA IMPULSIONAL. MÈTODE DE LA MULTICONVOLUCIÓ.

5.11. RESULTATS IL·LUSTRATIUS.

5. DETERMINACIÓ TEÒRICA DE LA RESPOSTA IMPULSIONAL. MÈTODE DE LA MULTICONVOLUCIÓ.

5.1. PLANTEJAMENT I OBJECTIUS.

Per a determinar teòricament la resposta impulsional s'han emprat dos procediments diferents.

El primer parteix del coneixement de la impedància acústica a l'extrem d'entrada de l'instrument i per mitjà de la Transformada Inversa de Fourier -TF⁻¹- proporciona la resposta impulsional.

El segon, que havia estat emprat anteriorment a nivell conceptual i qualitatiu però no de manera quantitativa com ha estat desenvolupat en aquesta tesi, reproduïx numèricament el procés de generació de la resposta impulsional a partir d'un impuls inicial de velocitat localitzat a l'extrem d'entrada. Per això ha estat necessari caracteritzar, en forma de funcions temporals, les reflexions que tenen lloc en les diferents discontinuïtats del perfil interior de l'instrument i en els seus extrems, així com l'efecte de l'esmoreïment. La resposta impulsional s'obté en convolucionar les ones de pressió que es propaguen al llarg del tub amb les diferents funcions de reflexió i amb les funcions d'esmoreïment. En acabar la posta a punt d'aquest procediment, el 12^{au} Congrés Internacional d'Acústica ha fet palès que Ayers l'havia desenvolupat en paral·lel com a alternativa per a l'estudi de l'acústica dels tubs cònics (Ayers 1985,1986).

Aquest segon procediment, el qual s'ha anomenat *mètode de la multiconvolució*, encara que requereix un temps de càlcul més elevat que el primer quan el nombre de discontinuïtats és gran, permet seguir l'evolució temporal de la pressió mentre es van produïnt les diferents reflexions i facilita així la identificació de l'origen de les reflexions que arriben a l'extrem d'entrada i que conformen la resposta impulsional. A més permet obtenir una millor resolució temporal sense el problema que comporta l'haver d'emprar un algorisme de Transformada Ràpida de Fourier -FFT- amb un nombre elevat de punts.

A l'hora d'aplicar el primer procediment, per al càlcul de la impedància acústica a l'extrem d'entrada s'ha emprat el mètode presentat per Cardona a la seva tesi doctoral (Cardona 1980).

Cardona considera que el perfil interior de l'instrument està format per una successió de trams cilíndrics i cònics, i modelitza el comportament acústic de la columna d'aire per mitjà de la formulació d'ones uniparamètriques longitudinals, planes en els trams cilíndrics, i esfèriques en els trams cònics. Emprant aquesta formulació dedueix les expressions que permeten determinar la impedància a l'extrem d'un tram coneguda la impedància a l'extrem oposat. I finalment, mitjançant aquestes expressions, determina la impedància a l'extrem d'entrada de l'instrument partint de la impedància a l'extrem de sortida -extrem obert del qual se'n coneix la formulació precisa de la seva impedància-.

El procediment es complica per l'existència dels forats laterals propis dels instruments de fusta, tant oberts com tapats, que modifiquen la impedància a la secció del tub on es localitzen. Els forats es modelitzen mitjançant la seva pròpia impedància que s'acobla amb la de la columna d'aire a la secció corresponent.

Per tal d'obtenir un model lineal que presenti solucions analítiques viables s'assumeixen les següents hipòtesis simplificadores:

Es suposa que no hi ha discontinuïtats de pressió i de cabal a les unions d'un tram cilíndric amb un tram cònic, o d'un tram cònic amb un altre de diferent conicitat. Això pressuposa que no hi ha discontinuïtat d'impedàncies acústiques analògiques a la secció d'unió de trams consecutius. Aquesta hipòtesi és acceptable per quant els canvis de conicitat que presenten tant el tible com la tenora són petits.

Es considera que el medi en el qual es propaguen les ones es troba en repòs. Realment en els instruments de vent el moviment propiament acústic es troba superposat a un flux permanent, però la correcció analítica que se'n podria derivar en el context de la modelització emprada és pràcticament negligible perquè aquesta correcció depèn del quadrat del nombre de Mach del flux permanent, nombre que és de l'ordre de 0,01 per als instruments musicals de vent (Cardona 1980). Aixó no vol dir que en realitat el flux permanent no tingui

una influència apreciable, sinó que aquesta influència es produeix per mitjà de fenòmens diferents als considerats en la modelització. En efecte, són els remolins creats en les discontinuïtats brusques els qui en modificar la geometria eficaç del tub són responsables de la influència del flux permanent en el comportament acústic.

A l'hora d'acoblar la impedància dels forats amb la de l'instrument a la secció on es troba situat el forat, no es considera l'efecte del canvi de direcció de la velocitat de l'aire que passa a través de la unió. Aquesta simplificació és necessària per mantenir la formulació lineal.

Per últim, el fet d'emprar la formulació d'ones uniparamètriques longitudinals exclou la consideració de la influència dels modes transversals de vibració en el funcionament acústic de l'instrument. Els modes transversals es poden originar en aquells indrets on hi ha canvi de direcció de la velocitat de l'aire -el pavelló, les seccions on hi ha forats, els canvis de secció i els canvis de conicitat-. Però les reduïdes dimensions radials tant del tible com de la tenora comparades amb la seva longitud, fan que els modes transversals no siguin propagatius en la direcció longitudinal, i que per tant no afectin apreciablement el seu comportament acústic (Agullo 1979). Aquest fet és important a l'hora d'analitzar el mecanisme d'autoexcitació que s'estableix entre la canya i la columna d'aire. La secció d'entrada del tudell té un diàmetre suficientment petit -4 mm- com perquè no hi arribin ones transversals, i per tant són només els modes longitudinals els que participen en el govern de la canya.

Pel que fa al pavelló, si bé diferents autors han determinat equacions d'ona que descriuen la propagació d'ones a l'interior de pavellons amb perfils diversos (Benade 1974), les solucions d'aquestes impliquen la consideració de modes transversals i només han estat determinades per a perfils de pavelló concrets. Amb la finalitat de mantenir el model de propagació d'ones uniparamètriques, el pavelló s'ha modelitzat mitjançant una successió de trams cònics dins dels quals es propaguen ones esfèriques. Tal aproximació descriu correctament el seu comportament pel que fa a les freqüències pròpies i a la radiació per l'extrem obert.

En el mètode de la multiconvolució desenvolupat en aquest capítol, la formulació de la funció de reflexió a cada discontinuïtat es troba com a FT^{-1} del

coeficient de reflexió complex, el qual és funció de les impedàncies que concorren en la discontinuïtat. Per al càlcul de les impedàncies acústiques es parteix de la mateixa formulació i de les mateixes hipòtesis establertes per Cardona.

En els apartats següents s'exposen la formulació general de les reflexions, la deducció de la funció de reflexió per a cada tipus de discontinuïtat i el bastiment de la tècnica emprada per a obtenir la resposta impulsional. Finalment s'exposen els resultats obtinguts emprant ambdós procediments en ser aplicats a diferents configuracions del perfil interior de tubs.

5.2. DETERMINACIÓ DE LES FUNCIONS DE REFLEXIÓ GENERALS.

La formulació d'ones uniparamètriques longitudinals s'estableix a partir de les equacions d'ona que descriuen el camp de la pressió a l'interior de tubs cilíndrics i de tubs cònics. L'equació d'ona s'obté de les equacions de la mecànica dels medis continus -balanç de cabal màssic i balanç de cabal de la quantitat de moviment- juntament amb l'equació d'estat del fluid, per al cas linealitzat d'un medi perfecte, en repòs, de propietats constants en l'espai i en el temps, i lliure de fonts, tant internes com de contorn (Agulló 1979 a i b, Cardona 1980).

Cas dels tubs cilíndrics.

En un tub cilíndric les ones uniparamètriques longitudinals són ones planes funció de la coordenada axial "x" i del temps -fig. 5.2.-1-.

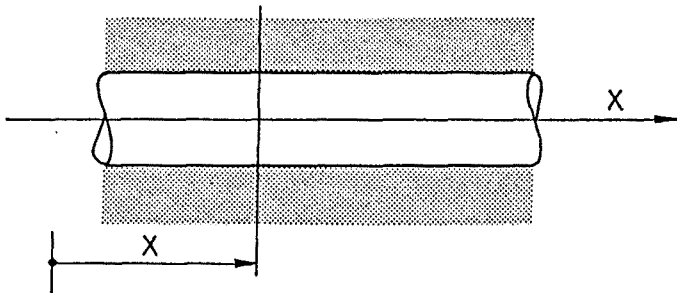


Fig. 5.2-1 Coordenada longitudinal en un tub cilíndric.

L'equació d'ona, o de d'Alembert, que caracteritza el camp de la pressió és (Morse 1948 a)

$$(c^{-2} \partial_{tt} - \partial_{xx}) p = 0 \quad , \quad (5.2.1)$$

on c representa la celeritat de propagació del so en camp lliure i p el camp de la pressió.

La integració de l'equació d'ona pel mètode de d'Alembert proporciona una interpretació molt convenient del fenomen de la propagació. En aquest l'operador diferencial es descomposa en producte d'operadors

$$(\partial_t + c \partial_x) (\partial_t - c \partial_x) p = 0 \quad , \quad (5.2.2)$$

als quals corresponen les solucions

$$\begin{aligned} (\partial_t + c \partial_x) p &= 0 \quad \Rightarrow \quad p = \varphi_-(x - ct) \\ (\partial_t - c \partial_x) p &= 0 \quad \Rightarrow \quad p = \varphi_+(x + ct) \quad , \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

on φ_- i φ_+ són funcions arbitràries.

La funció φ_- representa la pressió d'una ona arbitrària que es propaga en el sentit de x creixent, el qual s'ha considerant com a sentit positiu de la velocitat, amb celeritat c ; mentre la funció φ_+ representa la pressió d'una ona arbitrària que es propaga en sentit oposat, és a dir en el sentit de x decreixent, amb la mateixa celeritat. La superposició d'ambdues ones proporciona la descripció general del camp de la pressió.

Si el règim és estacionari i sinusoïdal de freqüència angular ω , l'equació d'ona passa a ser l'equació de Helmholtz

$$(\partial_{xx} + k^2) p = 0 \quad , \quad (5.2.4)$$

en la qual $k = \omega/c$ és l'anomenat número d'ona.

I les dues ones que constitueixen la solució venen definides per la part real de les funcions complexes

$$\hat{p}_- = A_- e^{-j(kx + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} , \quad (5.2.5)$$

que representa una ona sinusoïdal d'amplitud A_- que es propaga vers la x creixent, i

$$\hat{p}_+ = A_+ e^{j(kx + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} , \quad (5.2.6)$$

que representa una ona sinusoïdal d'amplitud A_+ que es propaga vers la x decreixent. L'angle de fase espacial ψ i l'angle de fase temporal ϕ són funció de les condicions d'extrem i de les condicions inicials respectivament.

El camp de la velocitat es relaciona amb el camp de la pressió per mitjà de l'equació de la quantitat de moviment

$$\partial_t \hat{v} = - \frac{1}{\rho_0} \text{grad } \hat{p} , \quad (5.2.7)$$

en la qual ρ_0 és la densitat mitjana del medi.

D'aquesta manera la velocitat per cadascuna de les ones solució ve donada per la part real dels camps complexos

$$\hat{v}_- = \frac{1}{\rho_0 c} A_- e^{-j(kx + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.2.8)$$

$$\hat{v}_+ = - \frac{1}{\rho_0 c} A_+ e^{j(kx + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} . \quad (5.2.9)$$

Conegudes la pressió i la velocitat es defineixen els conceptes d'impedància acústica específica i de funció de reflexió. La impedància acústica específica, o simplement impedància acústica, és el quocient de la pressió per la velocitat. En funció de les expressions 5.2.6, 7, 8 i 9, la impedància acústica de la secció situada a una distància x de l'origen es

determina per

$$Z(x, \omega) = \frac{\hat{p}_- + \hat{p}_+}{\hat{v}_- + \hat{v}_+} = Z_0 \frac{A_- e^{-j(kx + \psi)} + A_+ e^{j(kx + \psi)}}{A_- e^{-j(kx + \psi)} - A_+ e^{j(kx + \psi)}} \quad (5.2.10)$$

essent $Z_0 = \rho_0 c$ la impedància característica del medi.

La funció de reflexió complexa és el quocient de la pressió de l'ona \hat{p}_+ , la qual es considera com a reflectida, per la pressió de l'ona \hat{p}_- que es considera com a ona incident. Per a una secció situada a una distància x de l'origen, la funció de reflexió és

$$\hat{R}(x, \omega) = \frac{\hat{p}_+}{\hat{p}_-} = \frac{A_+}{A_-} e^{2j(kx + \psi)} \quad (5.2.11)$$

La denominació d'ona incident i d'ona reflectida s'adopta d'acord amb el sentit positiu escollit per a la velocitat. Es considera com a ona incident la que es propaga vers el sentit positiu i com a ona reflectida la que ho fa en sentit negatiu. Aquest criteri concorda amb el fet d'escollir com a sentit positiu en la resposta impulsional el de propagació de l'impuls inicial de velocitat.

Finalment les expressions 5.2.10 i 5.2.11 condueixen a la relació entre la funció de reflexió i la impedància acústica

$$\hat{R} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad (5.2.12)$$

Cas dels tubs cònics.

En un tub cònic les ones uniparamètriques longitudinals són ones esfèriques centrades al vèrtex del con, funció de la distància " r " al vèrtex -radi de l'ona esfèrica- i del temps.

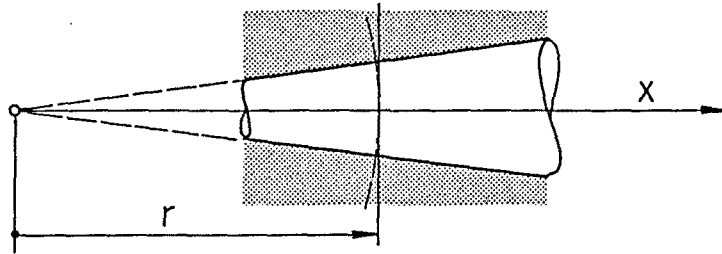


Fig. 5.2-2 Coordenada longitudinal en un tub cònic.

L'equació d'ona que descriu el camp de la pressió, expressada en coordenades esfèriques, adopta la forma (Morse 1948 b)

$$(c^{-2} \partial_{tt} - \frac{2}{r} \partial_r - \partial_{rr}) p = 0 \quad , \quad (5.2.13)$$

i per a un règim sinusoïdal permanent

$$(\partial_{rr} + \frac{2}{r} \partial_r + k^2) p = 0 \quad . \quad (5.2.14)$$

Si s'introdueix el canvi de variable $\Phi = r p$, ambdues equacions adopten la forma

$$(c^{-2} \partial_{tt} - \partial_{rr}) \Phi = 0 \quad . \quad (5.2.15)$$

$$(\partial_{rr} + k^2) \Phi = 0 \quad , \quad (5.2.16)$$

anàlegues a les equacions 5.2.1 i 5.2.4 per a tubs cilíndrics.

Emprant així el mateix mètode d'integració i desfent posteriorment el canvi de variable, s'arriba a obtenir la solució del camp de la pressió descrita per la superposició de les dues ones

$$\hat{p}_- = \frac{1}{r} A_- e^{-j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.2.17)$$

$$\hat{p}_+ = \frac{1}{r} A_+ e^{j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} , \quad (5.2.18)$$

que es propaguen en el sentit de r creixent i en el sentit de r decreixent respectivament. En aquest cas l'amplitud de cadascuna de les ones solució és inversament proporcional a la distància al vèrtex.

El camp de la velocitat es determina de nou amb l'expressió 5.2.7, essent la velocitat per a cada ona

$$\hat{v}_- = \frac{1}{r\rho_0 c} (1-j/kr) A_- e^{-j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.2.19)$$

$$\hat{v}_+ = -\frac{1}{r\rho_0 c} (1+j/kr) A_+ e^{j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} . \quad (5.2.20)$$

Amb les equacions 5.2.17, 18, 19 i 20, la impedància acústica definida d'igual manera que en el cas de tubs cilíndrics, adopta l'expressió

$$Z(r, \omega) = Z_0 \frac{A_- e^{-j(kr + \psi)} + A_+ e^{j(kr + \psi)}}{(1-j/kr) A_- e^{-j(kr + \psi)} - (1+j/kr) A_+ e^{j(kr + \psi)}} . \quad (5.2.21)$$

I la funció de reflexió és

$$\hat{R}(r, \omega) = \frac{\hat{p}_+}{\hat{p}_-} = \frac{A_+}{A_-} e^{2j(kr + \psi)} . \quad (5.2.22)$$

Finalment a partir de 5.2.21 i 5.2.22 s'estableix la relació entre la funció de reflexió i la impedància acústica

$$\hat{R} = \frac{Z(1-j/kr) - Z_0}{Z(1+j/kr) + Z_0} . \quad (5.2.23)$$

En el cas de tubs cònics és interessant analitzar el significat físic de cadascuna de les ones solució de l'equació d'ona. Per a l'ona que es propaga en el sentit de r creixent, la impedància acústica es defineix mitjançant l'expressió

$$Z_{-}(r, \omega) = \frac{\hat{p}_{-}}{\hat{v}_{-}} = \frac{Z_0}{1 - j/kr} \quad , \quad (5.2.24)$$

la qual correspon a la impedància acústica d'una ona esfèrica que es propagui en camp lliure (Jessel 1973).

La Transformada Inversa de Fourier de l'expressió 5.2.24 proporciona la descripció en el camp temporal del fenomen de la propagació d'ones esfèriques, i defineix la resposta impulsional per a la localització situada a una distància r de la font puntual que genera l'ona

$$h_{-}(t) = TF^{-1}(Z_{-}(\omega)) = Z_0 \left(\delta(t) - \frac{c}{r} e^{-ct/r} \right) \quad . \quad (5.2.25)$$

Per a l'ona que es propaga en el sentit de r decreixent la impedància acústica és

$$Z_{+}(r, \omega) = \frac{\hat{p}_{+}}{\hat{v}_{+}} = - \frac{Z_0}{1 + j/kr} \quad . \quad (5.2.26)$$

I la resposta impulsional obtinguda mitjançant la TF^{-1} de 5.2.26 és

$$h_{+}(t) = TF^{-1}(Z_{+}(\omega)) = -Z_0 \left(\delta(t) + \frac{c}{r} e^{ct/r} \right) \quad . \quad (5.2.27)$$

En aquest cas l'exponencial que apareix a la resposta impulsional és creixent, fet que indica la impossibilitat d'obtenir físicament una ona esfèrica única que es propagui vers el centre de l'ona -el vèrtex en un tub cònic-, sense l'aparició de reflexions que es propaguin en sentit contrari. A la pràctica, ja sigui en diferents discontinuïtats ja sigui en el mateix vèrtex del con, es produeixen reflexions que contrarresten el creixement exponencial de la

pressió de manera que el valor de pressió roman sempre acotat. Aquest fet es comprova a l'apartat 5.11 on s'exposen diferents resultats il·lustratius.

Cal per tant tenir en compte que les ones \hat{p}_+ i \hat{p}_- són només una manera d'expressar la solució de l'equació d'ona, i que per tant no tenen cap entitat física. Es el camp de la pressió, definit per la superposició d'ambdues ones \hat{p}_+ i \hat{p}_- , el que descriu físicament el règim acústic establert dins el tub.

La formulació d'ones esfèriques en tubs cònics s'ha establert suposant que el sentit positiu de la velocitat coincideix amb el d'allunyament del vèrtex, és a dir amb el de radi creixents. En el cas contrari -fig. 5.2-3- la formulació s'estableix de manera anàloga però introduïnt el canvi de signe de les velocitats.

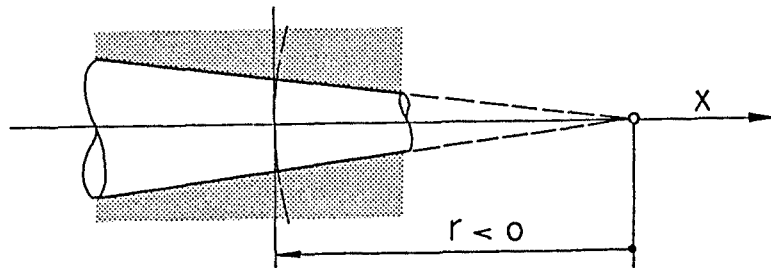


Fig. 5.2-3 Tub cònic amb "r" decreixent vers el sentit positiu de la coordenada longitudinal.

Per tant, l'ona que es propaga vers r decreixent és ara la que es propaga en sentit positiu:

$$\hat{p}_+ = \frac{1}{r} A_+ e^{j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.2.28)$$

$$\hat{v}_+ = \frac{1}{r\rho_0 c} (1 + j/kr) A_+ e^{j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)}$$

I l'ona que es propaga vers r creixent ho fa en sentit negatiu:

$$\hat{p}_- = \frac{1}{r} A_- e^{-j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.2.29)$$

$$\hat{v}_- = -\frac{1}{r\rho_0 c} (1-j/kr) A_- e^{-j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} .$$

La impedància acústica canvia de signe

$$Z(r, \omega) = Z_0 \frac{A_- e^{-j(kr + \psi)} + A_+ e^{j(kr + \psi)}}{- (1-j/kr) A_- e^{-j(kr + \psi)} + (1+j/kr) A_+ e^{j(kr + \psi)}} . \quad (5.2.30)$$

I la funció de reflexió s'inverteix, ja que ara l'ona incident, la que es propaga en sentit positiu, és \hat{p}_+ i l'ona reflectida és \hat{p}_- .

$$\hat{R}(r, \omega) = \frac{\hat{p}_-}{\hat{p}_+} = \frac{A_-}{A_+} e^{-2j(kr + \psi)} . \quad (5.2.31)$$

De 5.2.25 i 5.2.27 s'obté finalment

$$\hat{R} = \frac{Z(1+j/kr) - Z_0}{Z(1-j/kr) + Z_0} , \quad (5.2.32)$$

expressió que coincideix amb la 5.2.23 si es canvia simplement el signe dels radis. Per tant l'expressió 5.2.23 es pot emprar per ambdós casos si s'adopta el següent criteri:

- . El signe dels radis és positiu si el sentit positiu de la velocitat coincideix amb el de radis creixents.
- . El signe dels radis és negatiu si el sentit positiu de la velocitat coincideix amb el de radis decreixents.

Les expressions 5.2.12 i 5.2.23 són emprades en els apartats següents per a determinar les funcions de reflexió degudes a diferents tipus de discontinuïtats del perfil interior de l'instrument, així com les funcions de reflexió dels extrems. A tal fi es particularitzen ambdues expressions per a configuracions del perfil interior que només presentin la discontinuïtat o l'extrem que es vol analitzar.

5.3. REFLEXIÓ DEGUDA A UN CANVI DE DIÀMETRE.

El perfil interior dels instruments de vent pot presentar canvis sobtats de diàmetre en la unió d'algunes de les seves parts, canvis que en general són atribuïbles a un desgast de l'allotjament de l'espiga d'unió o a un mal ajust de les parts. Aquest és el cas per exemple de la unió del cos central de la tenora amb el pavelló.

Encara que sovint les modelitzacions del perfil interior dels instruments de vent negligeixen aquests canvis de diàmetre, les reflexions que provoquen són suficientment intenses com per ser tingudes en consideració. Aquest fet es posa de manifest en els resultats experimentals presentats al capítol 4.

La figura 5.3-1 mostra el perfil interior d'un tub cilíndric format per dos trams de diferent diàmetre.

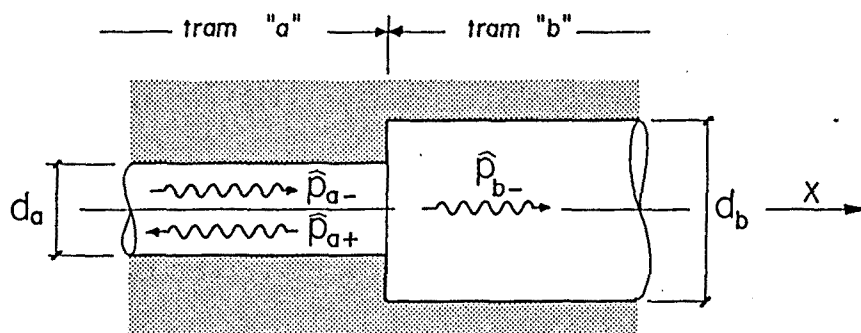


Fig. 5.3-1 Canvi de diàmetre en un tub cilíndric.

La reflexió produïda a la unió d'ambdós trams queda definida per la funció de reflexió

$$\hat{R}_d = \frac{\hat{p}_{a+}}{\hat{p}_{a-}} \quad , \quad (5.3.1)$$

on \hat{p}_{a-} i \hat{p}_{a+} representen respectivament la pressió a la secció d'unió de l'ona incident i de l'ona reflectida que es propaguen al llarg del tram "a".

Perquè l'ona reflectida sigui deguda exclusivament al canvi de diàmetre, cal que no existeixi cap altre reflexió provinent d'altres discontinuïtats localitzades al tram "b". Aquesta condició és compleix només en el cas que el tram "b" sigui uniforme i infinitament llarg, o el que és equivalent, que acabi amb una "terminació anecòica" que absorbeixi totalment l'ona que es propaga vers x creixent -ona \hat{p}_{b-} . En aquesta situació la impedància acústica del tram "b" definida a la secció d'unió coincideix amb la impedància característica Z_0 que presenta la propagació d'ones planes en camp lliure (Jessel 1973).

Si d'acord amb les hipòtesis establertes a l'apartat 5.1 s'accepta que les ones són planes i que la pressió és la mateixa a ambdós cantons de la unió, així com que el cabal volumètric longitudinal que passa a través de la unió es conserva, aleshores

$$\hat{p}_a = \hat{p}_{a+} + \hat{p}_{a-} = \hat{p}_{b-} = \hat{p}_b \quad (5.3.2)$$

$$S_a \hat{v}_a = S_a (\hat{v}_{a+} + \hat{v}_{a-}) = S_b \hat{v}_{b-} = S_b \hat{v}_b \quad , \quad (5.3.3)$$

amb S_a i S_b les respectives àrees transversals d'ambdós trams.

Aquestes expressions permeten relacionar la impedància acústica del tram "a", definida a la secció d'unió, amb la impedància acústica del tram "b" definida a la mateixa secció:

$$Z_a = \frac{\hat{p}_a}{\hat{v}_a} = \frac{S_a \hat{p}_b}{S_b \hat{v}_b} = \frac{S_a}{S_b} Z_0 \quad . \quad (5.3.4)$$

I substituïnt finalment a l'expressió general de la funció de reflexió en un tub cilíndric -expressió 5.2.12- s'obté la funció de reflexió deguda exclusivament al canvi de diàmetre definida a la secció d'unió

$$\hat{R}_d(\omega) = \frac{Z_a - Z_0}{Z_a + Z_0} = \frac{S_a - S_b}{S_a + S_b} \quad (5.3.5)$$

En ser \hat{R}_d un valor constant independent de la freqüència, la seva Transformada Inversa de Fourier s'expressa matemàticament per mitjà d'una funció impuls

$$R_d(t) = \text{TF}^{-1}(\hat{R}_d(\omega)) = \frac{S_a - S_b}{S_a + S_b} \delta(t) \quad (5.3.6)$$

on $\delta(t)$ és la funció impuls unitari o de Dirac, definida com -Fig. 5.3-2-

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} && \text{per a } 0 \leq t \leq T \\ \delta(t) &= 0 && \text{per a } t < 0 \text{ i } t > T \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

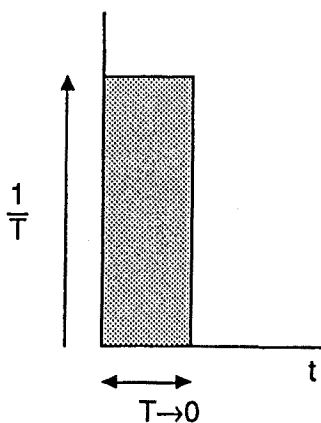


Fig. 5.3-2 Funció impuls unitari de Dirac.

La funció de reflexió temporal $R(t)$ representa la pressió de l'ona reflectida en el canvi de diàmetre quan la pressió de l'ona incident és un impuls unitari. Per a obtenir la pressió de l'ona reflectida causada per ua ona incident arbitrària cal recórrer al producte de convolució

$$p_{a+}(t) = R_d(t) * p_{a-}(t) = \frac{S_a - S_b}{S_a + S_b} p_{a-}(t) . \quad (5.3.8)$$

Si el canvi de diàmetre és tal que $S_a < S_b$, aleshores la pressió de l'ona reflectida és anàloga a la de l'ona incident però de magnitud més petita i de signe oposat. Per contra si $S_a > S_b$ ambdues ones presenten el mateix signe.

Els casos extrems de canvi de diàmetre venen donats pels casos $S_b = 0$ i $S_b \rightarrow \infty$. Quan $S_b = 0$ el tub queda totalment tancat i la funció de reflexió es redueix a

$$R_d(t) = \delta(t) , \quad (5.3.9)$$

essent l'ona reflectida idèntica a l'ona incident.

Quan $S_b \rightarrow \infty$, la situació que s'estableix equival a la d'un tub que desenhoca en una paret transversal infinita. La funció de reflexió és ara

$$R_d(t) = -\delta(t) , \quad (5.3.10)$$

i l'ona reflectida passa a ser la simètrica de l'ona incident.

La funció de reflexió d'extrem obert així obtinguda no és més que una primera aproximació de la funció de reflexió real, per quant en la seva deducció no s'ha considerat l'existència de radiació d'energia a l'extrem. Aquest fet s'observa si s'imposa $S_b \rightarrow \infty$ a l'expressió 5.3.4. La impedància acústica a l'extrem del tub, Z_a , és nul·la i com a conseqüència també ho és el cabal d'energia radiada, el qual ve definit per la part real de l'expressió

$$W = R \{ S_a \hat{p}_a \hat{v}_a^* \} = R \{ S_a Z_a \hat{v}_a \hat{v}_a^* \} = S_a |v_a|^2 R \{ Z_a \} , \quad (5.3.11)$$

on \hat{v}_a^* és el conjugat de la variable complexa representativa de la velocitat.

A l'apartat 5.6 s'estudia amb detall el fenomen de la radiació a l'extrem obert.

5.4. REFLEXIÓ DEGUDA A UN CANVI DE CONICITAT.

Els canvis sobtats de conicitat apareixen en diferents seccions del perfil interior del tible i de la tenora, i són també emprats per modelitzar el perfil del pavelló d'aquests instruments.

La figura 5.4-1 mostra un canvi de conicitat per al cas en que ambdós trams tenen radis positius. La reflexió provocada en el canvi de conicitat és causada per la discontinuïtat que representa el canvi sobtat de curvatura de les ones esfèriques que es propaguen al llarg de la unió.

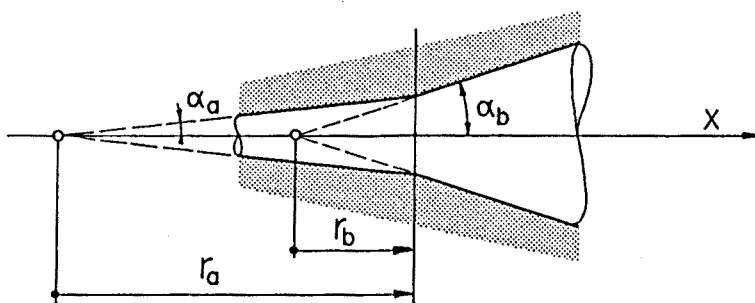


Fig. 5.4-1 Canvi de conicitat entre dos trams cònics.

La funció de reflexió associada es determina de manera anàloga a la d'un canvi de diàmetre. Per tal que la reflexió sigui produïda només pel canvi de conicitat, cal considerar que el segon tram, el "b", es prolonga fins a l'infinit, i per tant que no s'hi produeix cap reflexió addicional. En aquestes condicions la impedància acústica del tram "b" definida a la secció d'unió correspon a la impedància acústica d'ones esfèriques en camp lliure particularitzada per a una coordenada $r=r_b$

$$Z_b = \frac{Z_0}{1 - j/kr_b} \quad (5.4.1)$$

La hipòtesi enunciada a l'apartat 5.1 que fa referència a la continuïtat dels camps de la pressió i de la velocitat a la secció d'unió -sempre i quan no existeixi una discontinuïtat de diàmetre- fa que les impedàncies d'ambdós trams definides a aquesta secció coincideixin, es a dir $Z_a = Z_b$.

Amb això en substituir 5.4.1 a l'expressió general de la funció de reflexió en un tub cònic -expressió 5.2.23- particularitzada per al tram "a" i definida a la secció d'unió, s'obté finalment la funció de reflexió deguda al canvi de conicitat

$$\hat{R}_c(\omega) = \frac{Z_a(1-j/kr_a) - Z_0}{Z_a(1+j/kr_a) + Z_0} = \frac{r_b - r_a}{2jkr_b r_a - (r_b - r_a)} \quad (5.4.2)$$

Aïllant la variable complexa $j\omega$, la funció de reflexió adopta la forma

$$\hat{R}_c = \frac{(r_b - r_a) c / 2r_b r_a}{j\omega - (r_b - r_a) c / 2r_b r_a} = \frac{v}{j\omega - v} \quad (5.4.3)$$

expressió anàloga a la funció de resposta freqüencial d'un sistema de primer ordre amb un constant de temps $1/v$ definida per

$$v = \frac{(r_b - r_a) c}{2r_b r_a} \quad (5.4.4)$$

La reflexió actua per tant com a filtre de primer ordre que elimina preferentment les freqüències per sobre de la freqüència angular v .

La forma temporal de $R_c(\omega)$ s'obté per mitjà de la Transformada Inversa de Fourier

$$R_c(t) = \text{TF}^{-1}(\hat{R}_c(\omega)) = v e^{vt} \quad (5.4.5)$$

la qual és una funció exponencial que representa la pressió de l'ona reflectida quan la pressió de l'ona incident és un impuls unitari.

Si $r_b < r_a$, o el que és equivalent $\alpha_b < \alpha_a$, es diu que el canvi de conicitat és en el sentit d'obertura del perfil interior de l'instrument. En aquest cas la constant de temps és negativa i la funció de reflexió ve donada per una exponencial negativa decreixent. L'ona reflectida serà per tant de signe oposat al de l'ona incident.

Si $r_b > r_a$, o $\alpha_b > \alpha_a$, es diu que el canvi de conicitat és en el sentit de tancament del perfil interior. Aleshores la constant de temps és positiva i la funció de reflexió és una exponencial creixent. L'ona reflectida tindrà el mateix signe que la incident.

La presència d'una exponencial creixent en la funció de reflexió, i per tant d'una pressió permanentment en augment, no ha d'estranyar si es considera el que es va exposar a l'apartat 5.2. L'exponencial creixent apareix quan el gradient de conicitat que es presenta a la discontinuïtat és negatiu. A la pràctica les successives reflexions que es van produint en altres discontinuïtats es superposen de manera que el camp global de la pressió és sempre finit. Alguns dels resultats presentats a l'apartat 5.11 mostren aquest fet.

La funció de reflexió 5.4.5 també inclou els casos en que un d'ambdós trams és cilíndric. Un tub cilíndric es pot considerar com el cas límit d'un tub cònic per al qual les ones esfèriques que es propaguen en el seu interior siguin pràcticament ones planes; és a dir per al qual $r \rightarrow \infty$.

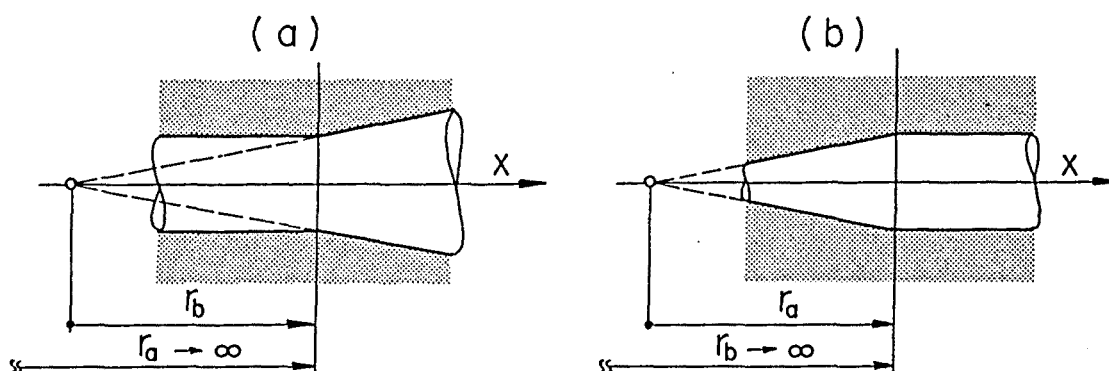


Fig. 5.4-2 Canvis de conicitat entre un tram cilíndric i un tram cònic.

Quan el tram "a" és cilíndric -Fig. 5.4-2 (a)- la constant de temps s'obté de 5.4.4 imposant $r_a \rightarrow \infty$

$$v = -\frac{c}{2r_b} \quad (5.4.6)$$

Quan el tram cilíndric és el tram "b" -Fig. 5.4-2 (b)- cal imposar a 5.4.4 la condició $r_b \rightarrow \infty$

$$v = \frac{c}{2r_a} \quad (5.4.7)$$

En cas que es presenti algún tram amb radi negatiu la funció de reflexió continua essent vàlida si s'introdueix el signe negatiu del radi, d'acord amb el criteri de signes establert a l'apartat 5.2.

El procediment emprat per a obtenir la formulació de la reflexió produïda en un canvi de conicitat es pot generalitzar al cas en que la discontinuïtat, a més de presentar un canvi de conicitat, presenta un canvi de diàmetre -figura 5.4-3-.

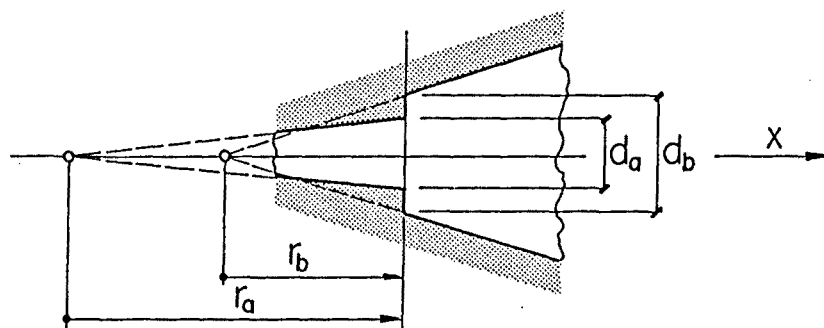


Fig. 5.4-3 Canvi de diàmetre i de conicitat entre dos trams cònics.

En aquest cas la impedància acústica del tram "a" a la secció d'unió es relaciona amb la impedància acústica del tram "b" a la mateixa secció segons

$$Z_a = \frac{S_a}{S_b} Z_b = \frac{S_a}{S_b} \frac{Z_0}{1 - j/kr_b} \quad (5.4.8)$$

I si s'introdueix aquesta relació a l'expressió 5.4.2 s'obté, un cop aplicada la TF⁻¹,

$$R_c(t) = \frac{B-1}{B+1} \delta(t) + \frac{2B}{B+1} v e^{vt} \quad (5.4.9)$$

amb $B = S_a/S_b$ la relació d'àrees a la secció d'unió, i

$$v = \frac{c}{B+1} \left(\frac{B r_b - r_a}{r_a r_b} \right) \quad (5.4.10)$$

Si $B=1$, és a dir si no es presenta el canvi de diàmetre, l'expressió 5.4.9 coincideix amb la 5.4.5. I si ambdós trams són cilíndrics, aleshores $v \rightarrow 0$ i l'expressió 5.4.9 passa a coincidir amb la 5.3.6.

5.5. REFLEXIÓ EN UN EXTREM TANCAT.

En la determinació de la resposta impulsional pel procediment de la multiconvolució la condició d'extrem tancat es dona a la secció d'entrada a partir just després de l'instant inicial, en ser el cabal d'entrada un impuls de Dirac. La configuració d'un extrem tancat en un tub cònic, per al cas d'un tub cònic que presenti una distància del vèrtex a l'extrem $-r_e$ - positiva, es mostra a la figura 5.5-1.

A la secció on es situa l'extrem tancat, la velocitat de l'aire és nul·la mentre la pressió pot prendre valors arbitraris. Per tant la impedància acústica a aquesta secció $-Z_{et}$ és infinita, i la funció de reflexió s'obté de l'expressió 5.5.23 imposant la condició $Z_{et} \rightarrow \infty$

$$\hat{R}_{et}(\omega) = \frac{(1-j/kr_e) - Z_0/Z_{et}}{(1+j/kr_e) + Z_0/Z_{et}} = \frac{1-j/kr_e}{1+j/kr_e} \quad (5.5.1)$$

$Z_{et} \rightarrow \infty$

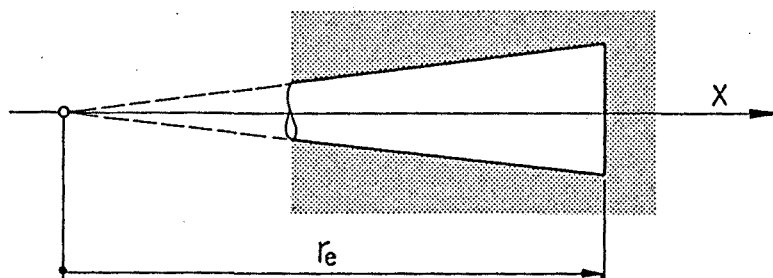


Fig. 5.5-1 Extrem tancat en un tub cònic.

Si s'aïlla la variable complexa $j\omega$ la funció de reflexió adopta la forma

$$\hat{R}_{et} = 1 + \frac{2v}{j\omega - v} \quad \text{amb} \quad v = \frac{c}{r_e} \quad (5.5.2)$$

I la seva forma temporal és

$$R_{et}(t) = \mathcal{TF}^{-1}(\hat{R}_{et}(\omega)) = \delta(t) + 2v e^{vt} \quad (5.5.3)$$

funció definida per la superposició d'un impuls unitari positiu i d'una funció exponencial positiva creixent quan $r_e > 0$, i negativa decreixent quan $r_e < 0$.

De nou la presència d'una exponencial creixent és causa de l'aparició d'una ona reflectida amb pressió permanentment en augment, tal com succeïa en alguns canvis de conicitat. En aquest cas, i tal com s'exposà a l'apartat 5.2, aquest fet és reflex de la impossibilitat d'obtenir una ona esfèrica que es propagui vers el vèrtex del tub sense la presència de reflexions posteriors. A la realitat les reflexions que es produeixen en les altres discontinuïtats compensen el creixement exponencial de manera que la pressió global és sempre finita.

L'expressió 5.5.3 caracteritza igualment la reflexió que es produeix a l'extrem tancat d'un tub cilíndric i al vèrtex d'un tub cònic complet, és a dir sense truncament -Fig. 5.5-2-.

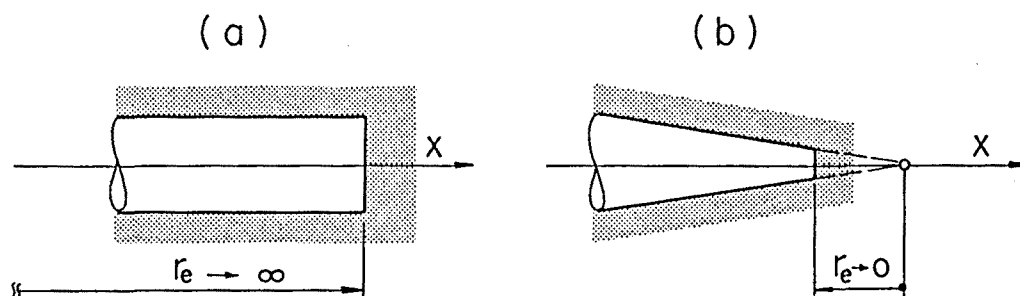


Fig. 5.5-2 Extrems tancats en un tub cilíndric (a) i en un tub cònic complet (b).

Per al cas d'un tub cilíndric, si s'imposa $r_e \rightarrow \infty$ a l'expressió 5.5.3, la funció de reflexió es redueix a un impuls unitari positiu -resultat que coincideix amb l'obtingut a l'apartat 5.3-.

Per al cas d'un tub cònic complet, aquest es pot considerar com el cas limit d'un tub cònic truncat en el qual r_e , negatiu, tendeix a zero. Aleshores l'exponencial negativa decreixent de la funció de reflexió passa a ser un impuls negatiu de valor doble al de $\delta(t)$ i per tant la funció de reflexió es converteix en

$$R_{et}(t) = -\delta(t) . \quad (5.5.4)$$

Aquesta reflexió és idèntica a la que es produeix a l'extrem obert d'un tub cilíndric quan es considera nul·la la radiació d'energia -apartat 5.3-, fet que corrobora la similitud de comportament, pel que fa a freqüències pròpies, que presenten els tubs cilíndrics oberts per ambdós extrems i els tubs cònics complets oberts per l'extrem oposat al vèrtex (Cardona 1980, Barjau 1985).

5.6. REFLEXIÓ EN UN EXTREM OBERT.

La funció de reflexió real produïda a l'extrem obert d'un tub difereix apreciablement de la simple inversió d'ona incident que s'establí a l'apartat 5.3. i que corresponia a la hipòtesi d'impedància nul·la.

La formulació teòrica de la impedància d'extrem obert ha estat només resolta sota la hipòtesi de propagació d'ones planes a l'interior de tubs cilíndrics. Lord Rayleigh l'estableix per primer cop en el cas de l'extrem obert d'un tub cilíndric que desenboqui en un pla rígid infinit (Rayleigh 1896). El resultat, expressat en forma d'impedància acústica a l'extrem obert, és (Morse 1948 c)

$$Z_{eo} = Z_0 (\theta_0 + j\chi_0) \quad , \quad (5.6.1)$$

amb

$$\theta_0 = 1 - \frac{2}{kd} J_1(kd) = 1 - \frac{2}{\pi kd} \int_0^{\pi} \sin(kd \sin\alpha) \sin\alpha \, d\alpha \quad (5.6.2)$$

$$\chi_0 = M(kd) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(kd \cos\alpha) \sin^2\alpha \, d\alpha \quad , \quad (5.6.3)$$

i on k és el número d'ona, d és el diàmetre del tub i J_1 és la funció de Bessel d'ordre 1. Aquesta expressió presuposa que el sentit positiu de la velocitat és vers l'exterior del tub.

Levine i Schwinger (Levine 1948) estudien la radiació a l'extrem obert per al cas d'un tub cilíndric de gruix negligible que desenboqui directament en camp lliure, és a dir en absència total de pla. Presenten el resultat en forma de funció de reflexió

$$\hat{R}_{eo} = -R_0 e^{-jk d \alpha_0} \quad , \quad (5.6.4)$$

amb R_0 i α_0 funció de kd .

La impedància acústica corresponent a aquesta formulació es pot determinar a partir de la funció de reflexió 5.6.4 i de l'expressió general de la funció de reflexió en tubs cilíndrics -expressió 5.2.12-:

$$\hat{R}_{eo} = \frac{Z_{eo} - Z_0}{Z_{eo} + Z_0} \quad , \quad (5.6.5)$$

d'on aïllant Z_{eo} s'obté

$$Z_{eo} = Z_0 (\theta'_0 + j\chi'_0) \quad , \quad (5.6.6)$$

amb

$$\theta'_0 = \frac{1 - R_0^2 \cos(2kd\alpha_0)}{1 + R_0^2 + 2R_0 \cos(kd\alpha_0)} \quad (5.6.7)$$

$$\chi'_0 = \frac{R_0^2 \sin(2kd\alpha_0)}{1 + R_0^2 + 2R_0 \cos(kd\alpha_0)} \quad . \quad (5.6.8)$$

La configuració d'extrem obert que presenten els extrems de sortida del tible i la tenora difereix de les resoltes teòricament. El perfil d'ambdós instruments és fonamentalment cònic i acaba en un pavelló, el qual es modelitza també mitjançant trams cònics.

La condició d'extrem obert també intervé en la modelització de les reflexions produïdes pels forats oberts. En aquest cas, malgrat ser els forats cilíndrics, aquests són curts i orientats a 90° respecte del tub principal, el que pot fer diferir el model de propagació del model establert d'ones planes en tubs cilíndrics. A més, l'extrem obert del forat desenboca en una superfície cilíndrica, la qual es pot considerar com una configuració intermèdia entre la de pla infinit i la d'absència de pla.

Davant la manca d'una formulació precisa de la radiació per a cadascun d'aquests casos, es considera vàlida per a tots dos la formulació de la radiació a l'extrem obert d'un tub cilíndric que desenboqui en un pla infinit, bo i acceptant el caràcter orientatiu dels resultats que se'n deriven. Per al cas de

l'extrem obert del pavelló, la formulació emprada implica prescindir del fet que les ones que s'hi propaguen no siguin planes.

S'estableix a continuació la funció de reflexió per als casos de l'extrem obert en un tub cilíndric i en un tub cònic.

Extrem obert en un tub cilíndric.

La reflexió produïda a l'extrem obert d'un tub cilíndric -figura 5.6-1- es descriu per mitjà de l'expressió 5.6.5, introduint-hi en ella la impedància d'extrem obert corresponent a la formulació escollida:

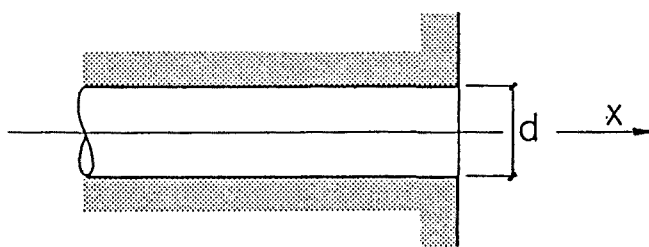


Fig. 5.6-1 Extrem obert en un tub cilíndric.

$$\hat{R}_{eo}(\omega) = \frac{Z_{eo} - Z_0}{Z_{eo} + Z_0} = \frac{(\theta_0 - 1) + j\chi_0}{(\theta_0 + 1) + j\chi_0} \quad (5.6.9)$$

La complexitat de les expressions de θ_0 i de χ_0 fa inviable la obtenció analítica de la forma temporal de la funció de reflexió, $R_{eo}(t)$, mitjançant la TF⁻¹. Tanmateix les aproximacions polinòmiques usualment emprades per representar θ_0 i χ_0 (Cardona 1980) no són vàlides a l'hora de determinar $R_{eo}(t)$ ja que en la antitransformada analítica intervenen totes les components freqüencials amb igual ponderació, i les aproximacions polinòmiques divergeixen de les funcions exactes a mesura que kd augmenta.

A la figura 5.6-2 es comparen les funcions analítiques de θ_0 i χ_0 amb les corresponents aproximacions polinòmiques obtingudes en considerar els primers termes no nuls dels seus respectius desenvolupaments en sèrie.

Com alternativa s'ha optat per ajustar una funció temporal a la funció de reflexió $R_{eo}(t)$ determinada numèricament per mitjà d'un algorisme FFT⁻¹. Els resultats obtinguts en calcular $R_{eo}(t)$ per a diferents diàmetres d'extrem obert demostren que la funció de reflexió és una funció negativa, d'àrea unitària i de valor mínim inversament proporcional al diàmetre de l'extrem obert. La forma de la funció suggereix emprar com aproximació una funció de distribució Gamma negativa

$$R_{eo}(t) = -\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-at} \quad \text{amb } \alpha > 0, a > 0 \text{ i } t > 0, \quad (5.6.10)$$

particularitzada per $\alpha=2$

$$R_{eo}(t) = -a^2 t e^{-at}. \quad (5.6.11)$$

Es tracta d'una funció d'àrea unitària i el seu valor mínim és $R_{eo}]_{\min} = -a/e$, valor que ha de coincidir amb el mínim de $R_{eo}(t)$ determinada numèricament. D'aquesta condició se'n deriva el valor del paràmetre "a":

$$-\frac{a}{e} = -\frac{K}{d} \rightarrow a = \frac{K e}{d}, \quad (5.6.12)$$

amb $K=267,5 \text{ ms}^{-1}$, constant de proporcionalitat entre el valor mínim i el diàmetre de l'extrem obert, establerta per $\rho_0=1,21 \text{ kgm}^{-3}$ i $c=340 \text{ ms}^{-1}$ -valors que corresponen a unes condicions ambientals de 10^5 Pa de pressió i de 15°C de temperatura-.

A la funció $R_{eo}(t)$ ajustada l'hi correspon una funció de reflexió freqüencial del tipus (Abramowitz 1965)

$$\hat{R}_{eo}(\omega) = \text{TF}[R_{eo}(t)] = \frac{-a^2}{(j\omega + a)^2}, \quad (5.6.13)$$

i d'ella se'n deriva una impedància acústica aproximada d'extrem obert

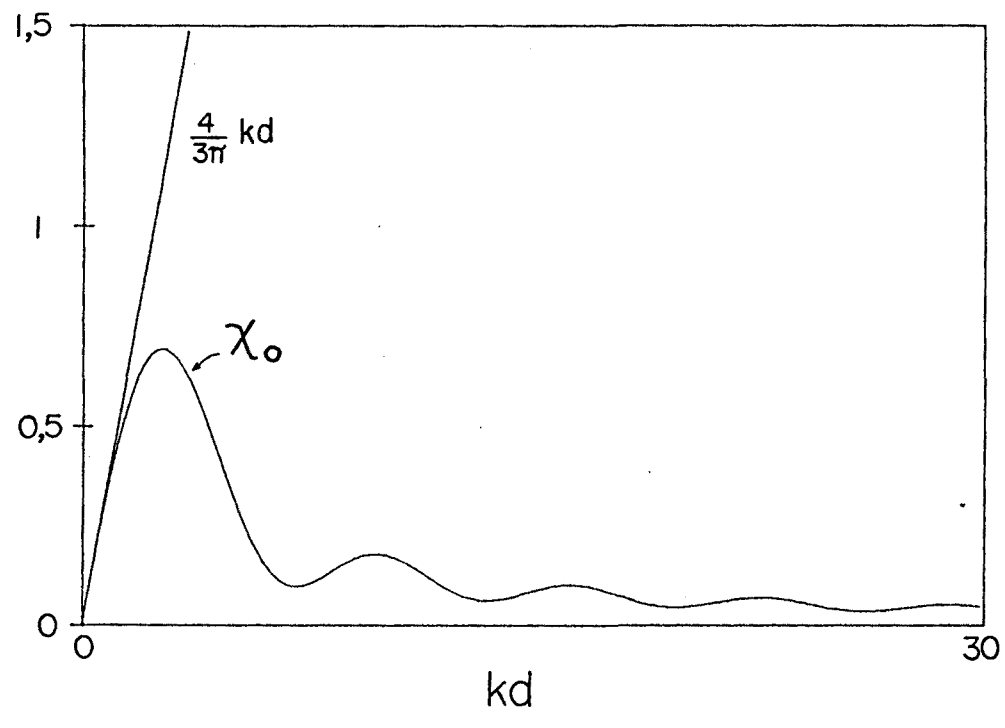
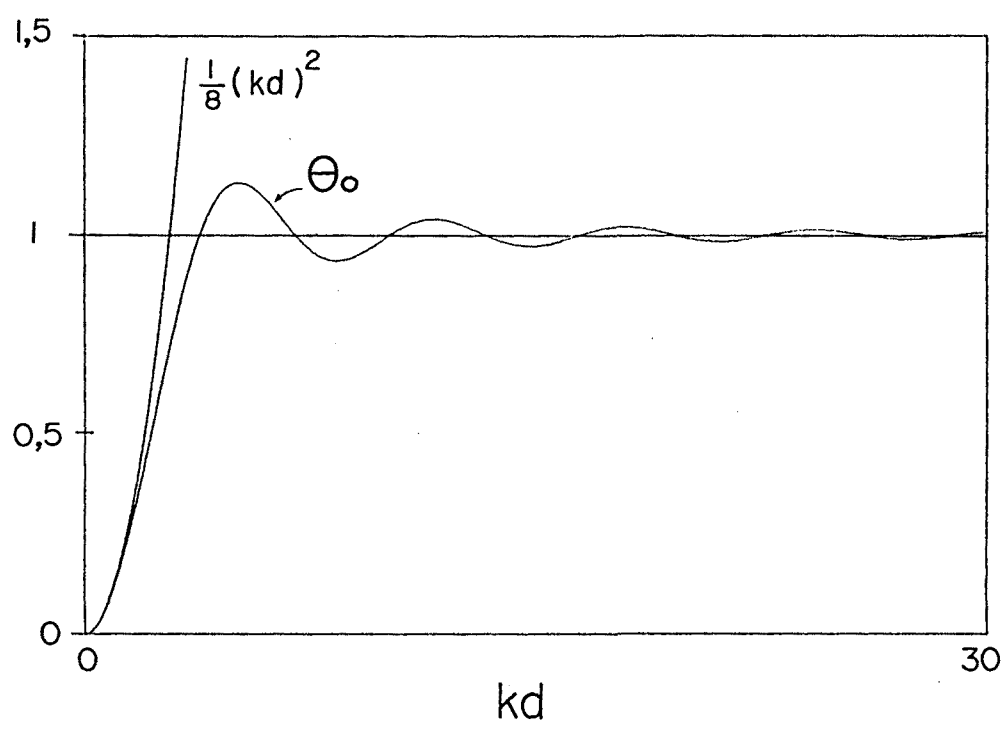


Fig. 5.6-2 Comparació entre les funcions analítiques de θ_0 i χ_0 i les seves respectives aproximacions.

$$Z_{eo} = Z_0 \frac{1 + \hat{R}_0}{1 - \hat{R}_0} = Z_0 \frac{(j\omega + a)^2 - a^2}{(j\omega + a)^2 + a^2} \quad (5.6.14)$$

A les figures 5.6-3 i 5.6-4 es comparen les funcions $R_{eo}(t)$ i $\hat{R}_{eo}(\omega)$ determinades numèricament amb les obtingudes d'acord amb l'aproximació establerta, per a diferents diàmetres de l'extrem obert.

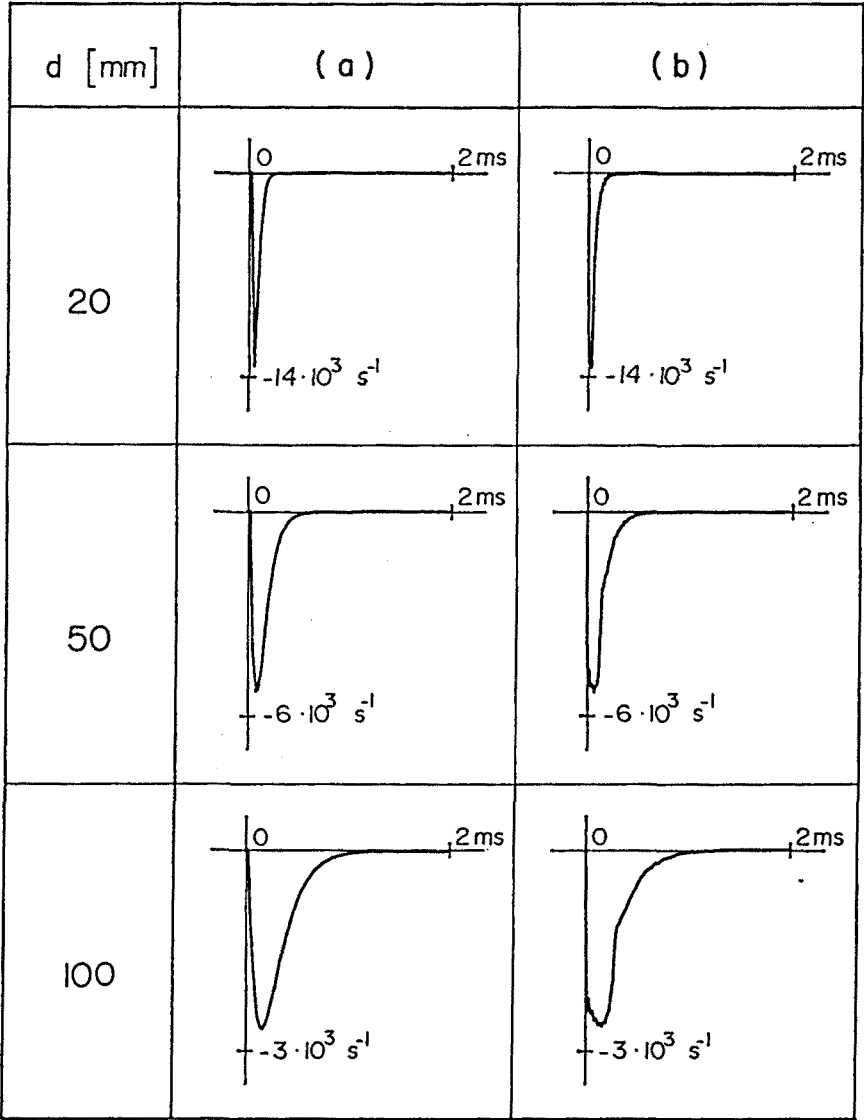


Fig. 5.6-3 Comparació entre les funcions de reflexió $R_{eo}(t)$ determinades segons l'expressió 5.6.11 (a), o bé numèricament (b).

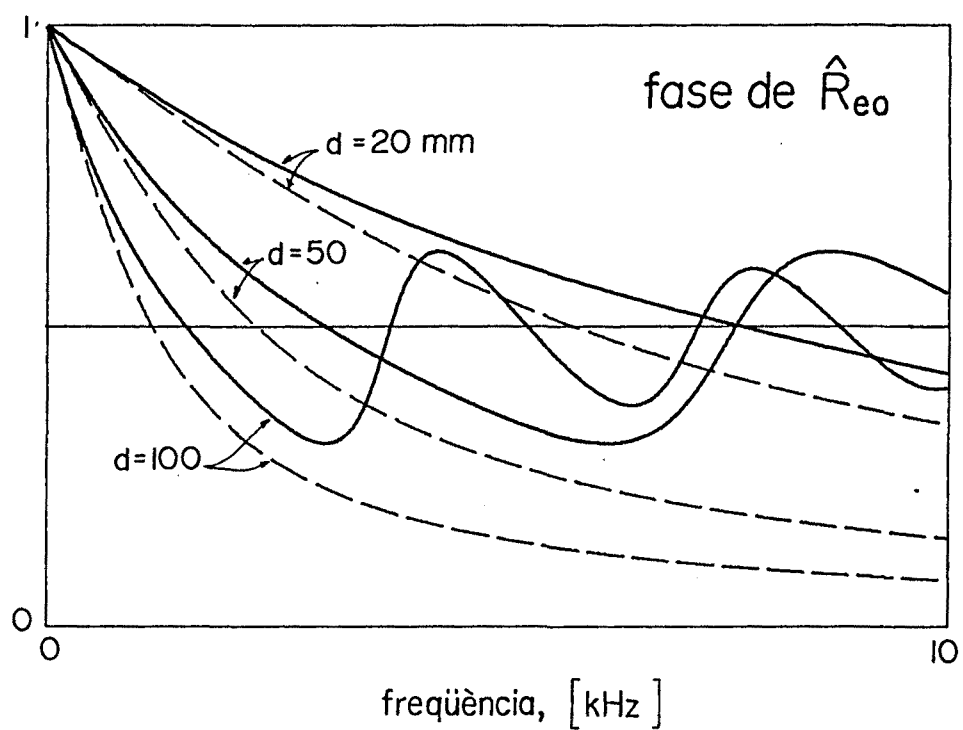
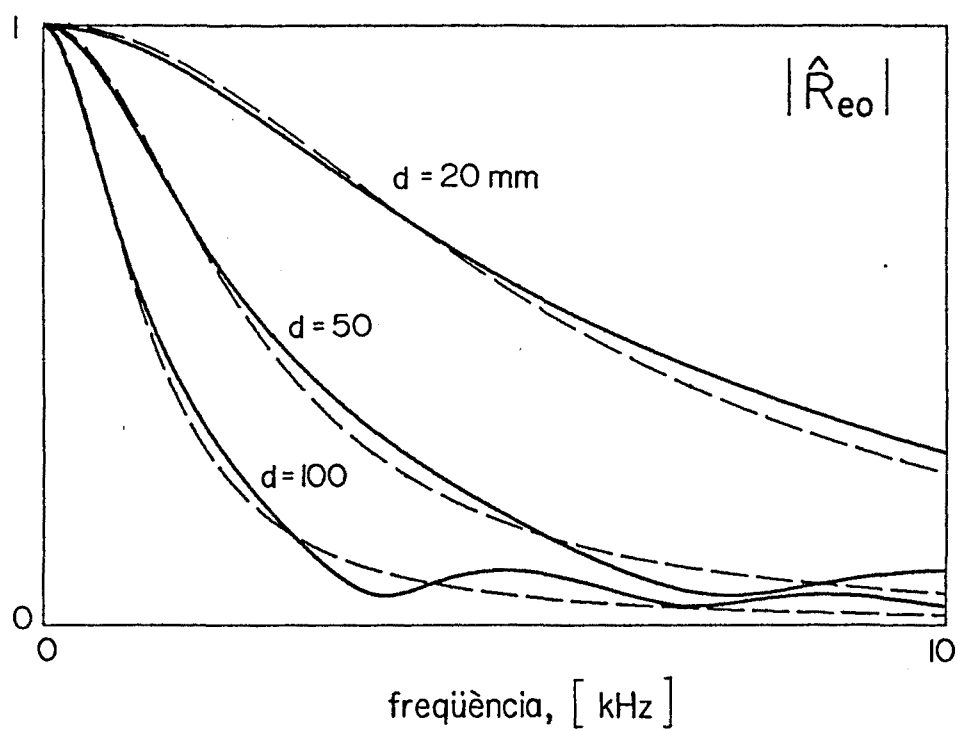


Fig. 5.6-4 Comparació entre les funcions de reflexió $\hat{R}_{eo}(\omega)$ determinades segons l'expressió 5.6.13 (a), o bé numèricament (b).

Extrem obert en un tub cònic.

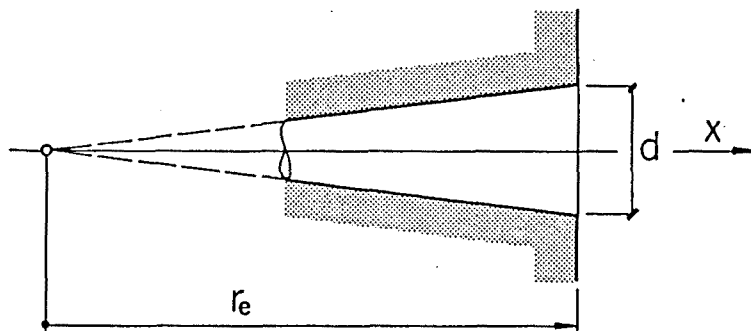


Fig. 5.6-5 Extrem obert en un tub cònic.

La reflexió produïda a l'extrem obert d'un tub cònic -figura 5.6-5- es descriu mitjançant:

$$\hat{R}_{eo} = \frac{Z_{eo}(1 - j/kr_e) - Z_0}{Z_{eo}(1 + j/kr_e) + Z_0} = \frac{(\theta_0 + j\chi_0)(1 - j/kr_e) - 1}{(\theta_0 + j\chi_0)(1 + j/kr_e) + 1}, \quad (5.6.15)$$

on Z_{eo} és la impedància corresponent a la modelització d'extrem obert en pla infinit i r_e és la distància del vèrtex a l'extrem obert.

Si s'introdueix la funció emprada per descriure Z_{eo} -expressió 5.6.14- en un tub cilíndric, s'obté

$$\hat{R}_{eo} = \frac{c(j\omega + 2a)/r_e - 2a^2}{2(j\omega + a)^2 - c(j\omega + 2a)/r_e}, \quad (5.6.16)$$

expressió que equival a

$$\hat{R}_{eo} = \frac{c/r_e j\omega + 2a(c/r_e - a)}{2(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)}, \quad (5.6.17)$$

amb

$$\frac{s_1}{s_2} = -a + \frac{c}{4r_e} (1 \pm \sqrt{1+8ar_e/c}) \quad (5.6.18)$$

Per al cas concret de l'extrem obert al pavelló $r_e > 0$ i les arrels s_1 i s_2 són reals. La forma temporal de la funció de reflexió és aleshores:

$$R_{eo}(t) = \frac{1}{2(s_1 - s_2)} (b_1 e^{s_1 t} - b_2 e^{s_2 t}) \quad (5.6.19)$$

essent

$$b_i = \frac{c s_i}{r_e} + 2a \left(\frac{c}{r_e} - a \right) \quad \text{amb } i = 1, 2$$

Els resultats obtinguts en comparar $R_{eo}(t)$ definida d'acord amb l'expressió 5.6.19 amb $R_{eo}(t)$ obtinguda numèricament mitjançant la FT^{-1} de l'expressió 5.6.15, mostren diferències importants atribuïbles a la doble Transformació emprada en l'obtenció de 5.6.19.

Aquest fet aconsella definir una funció de reflexió que s'ajusti millor a l'obtinguda numèricament. S'ha escollit de nou una funció de distribució Gamma amb $\alpha=2$

$$R_{eo}(t) = -b^2 t e^{-bt} \quad (5.6.20)$$

essent en aquest cas $b = a-c/2r_e$ i $a = Ke/d$ el mateix paràmetre emprat en la modelització de la reflexió a l'extrem obert d'un tub cilíndric.

A la figura 5.6-6 es compara la nova aproximació de $R_{eo}(t)$ amb la funció obtinguda numèricament per al cas d'un diàmetre d'extrem obert de 100 mm i per a diferents valors de r_e .

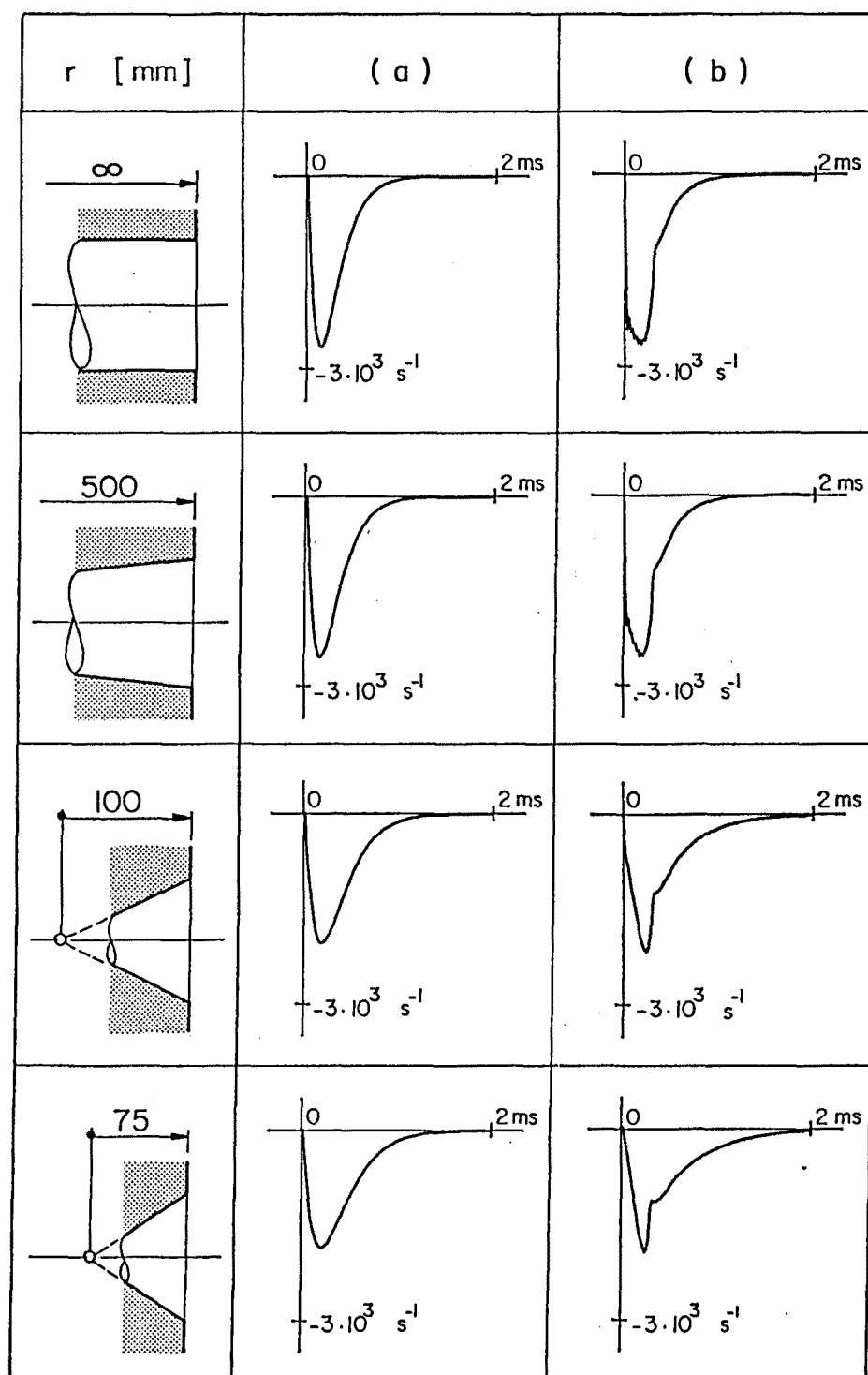


Fig. 5.6-6 Comparació entre les funcions de reflexió $R_{eo}(t)$ d'un extrem obert en un tub cònic determinades d'acord amb l'expressió 5.6.20 (a), o bé numèricament (b).

5.7. REFLEXIÓ DEGUDA A UN FORAT OBERT.

Els forats laterals del tible i de la tenora són gairebé cilíndrics i d'eix normal a l'eix de l'instrument. La seva configuració geomètrica -figura 5.7-1- es defineix mitjançant el diàmetre d_f i la longitud h_f de tub cilíndric representatiu del forat. La longitud h_f es pren igual al gruix de la paret del tub de l'instrument a la secció on hi ha l'eix del forat.

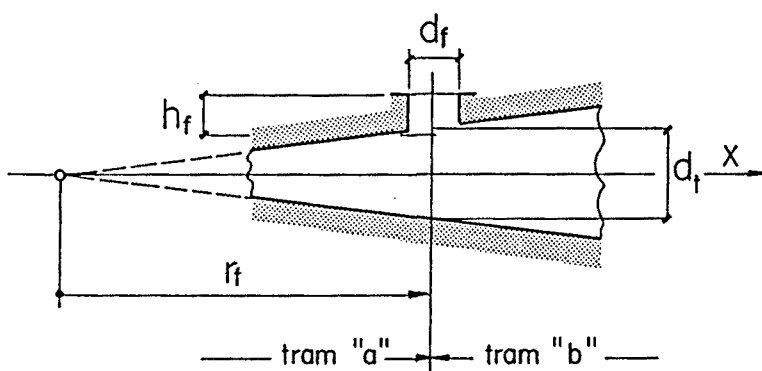


Fig. 5.7-1 Dimensions d'un forat obert en un tub cònic.

En la modelització dels forats, tant oberts com tapats, es considera que les seves dimensions són petites comparades amb la longitud d'ona a les freqüències usuals de funcionament, la qual cosa permet modelitzar el forat com una discontinuïtat localitzada a la secció del tub on es situa el seu eix.

La reflexió que produeix un forat en arribar una ona incident a la seva secció és deguda a la discontinuïtat que presenta la impedància acústica en aquesta secció. Per tal d'obtenir la funció de reflexió corresponent, s'empra el mateix procediment emprat en modelitzar les reflexions produïdes en canvis de diàmetre i canvis de conicitat. Per això es considera que la impedància acústica del tram "b" a la secció del forat ve donada per la impedància d'ones esfèriques en camp lliure -expressió 5.4.1- particularitzada per a $r=r_f$

$$Z_b = \frac{Z_0}{1 - j/kr_f} \quad (5.7.1)$$

La impedància acústica del tram "a" a la mateixa secció depèn de l'acoblament que s'estableix entre l'aire contingut dins el forat i la columna d'aire a l'interior de l'instrument.

Keefe modelitza matemàticament aquest acoblament, tant per forats oberts com tapats, fent us d'una analogia elèctrica (Keefe 1982 a i b). El forat es representa mitjançant un quadripol definit per dues impedàncies en sèrie, $Z_s/2$, i una impedància en paral·lel, Z_p , disposades tal com es mostra a la figura 5.7-2.

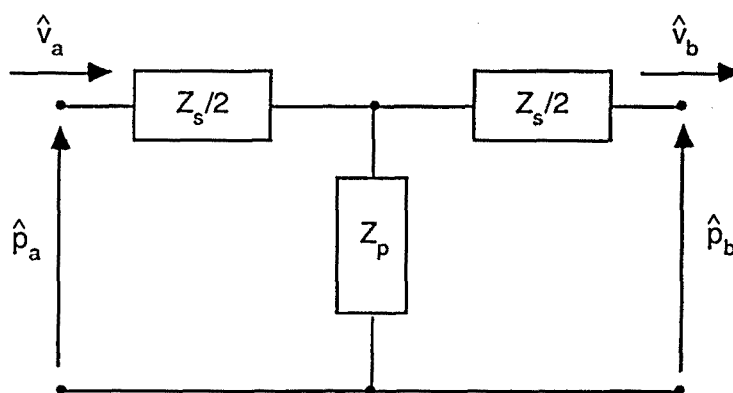


Fig. 5.7-2 Analogia elèctrica representativa d'un forat.

Les impedàncies, diferents per a forats oberts o tapats, són funcions complexes de la freqüència i de les dimensions del forat, i es determinen a partir de les condicions de contorn existents entre el forat i el tub i entre el forat i l'exterior, sota les següents hipòtesis:

. Per tal de mantenir la formulació d'ones uniparamètriques en el tub i en el forat, no es considera l'efecte del canvi de direcció sofert per l'aire que es mou a través de la unió entre el forat i el tub.

. Les pèrdues d'energia degudes a la radiació pel forat cap a l'exterior i a l'esmoreïment intern s'introdueixen mitjançant un terme resistiu que s'afegeix a Z_p i que Keefe avalua experimentalment.

Keefe també comprova experimentalment que $Z_s \ll Z_p$ i que per tant és la impedància en paral·lel la fonamental a l'hora d'establir l'acoblament. Considerant aquest fet, de l'esquema d'impedàncies es dedueix

$$Z_a = \frac{Z_p (Z_b + Z_s)}{Z_b + Z_p} \quad (5.7.2)$$

La complexitat de les expressions de Z_p i de Z_s , així com el caràcter experimental de l'estimació de les pèrdues, aconsella emprar una formulació més operativa. Si a més de les hipòtesis ja esmentades es considera que es verifica l'equació de la continuïtat del cabal volumètric, i es considera que la pressió és la mateixa a tot l'indret de la unió entre el forat i el tub (Nederveen 1969, Benade 1960), es poden establir les relacions

$$S_t \hat{v}_a = S_t \hat{v}_b + S_f \hat{v}_f \quad (5.7.3)$$

$$\hat{p}_a = \hat{p}_b = \hat{p}_f \quad (5.7.4)$$

on S_t i S_f són les àrees de les seccions del tub i del forat respectivament, i \hat{p}_f i \hat{v}_f són les variables complexes representatives de la pressió i de la velocitat de l'aire dins el forat a la secció d'unió. Com a sentit positiu de la velocitat s'ha pres per als forats el que va de dins cap a l'exterior, tot conservant el criteri de signes establert per al tub.

De les expressions anterior se'n deriva la relació

$$\frac{1}{Z_a} = \frac{1}{Z_b} + \frac{S_t}{S_f} \frac{Z_f}{Z_b} \rightarrow Z_a = \frac{S_t Z_b Z_f}{S_f Z_b + S_t Z_f} \quad (5.7.5)$$

en la qual $Z_f = \hat{p}_f / \hat{v}_f$ és la impedància del forat a la secció d'unió.

La relació 5.7.5 coincideix amb la de Keefe -expressió 5.7.2- si es considera $Z_s = 0$ i $Z_p = S_t Z_t / S_t$. S'accepta per tant que un forat obert es comporta com una impedància que s'acobla en paral·lel amb la del tub principal.

La impedància Z_t es determina a partir de la impedància Z_{to} a l'extrem de sortida del forat, i de la relació existent entre les impedàncies dels extrems d'un tub cilíndric (Cardona 1980). D'aquesta manera s'introdueix la formulació analítica de la radiació a l'extrem obert del forat anàlogament a com es va fer per a l'extrem obert de l'instrument:

$$Z_t = Z_0 \frac{(Z_{to} + Z_0) + (Z_{to} - Z_0) e^{-j2kh_t}}{(Z_{to} + Z_0) - (Z_{to} - Z_0) e^{-j2kh_t}} \quad (5.7.6)$$

En combinar les expressions 5.7.1 i 5.7.5, s'obté per a Z_a l'expressió

$$Z_a = Z_0 \frac{S_t Z_t}{S_t Z_t (1 - j/kr_t) + S_t Z_0} \quad (5.7.7)$$

I finalment l'expressió 5.2.23, junt amb la 5.7.7, estableix la funció que descriu la reflexió produïda per un forat obert:

$$\hat{R}_{fo}(\omega) = \frac{Z_a (1 - j/kr_t) - Z_0}{Z_a (1 + j/kr_t) + Z_0} = \frac{-S_t Z_0}{2 S_t Z_t + S_t Z_0} \quad (5.7.8)$$

funció igualment vàlida per a forats oberts en tubs cilíndrics i en tubs cònics, ja que no depèn de r_t .

Quan s'introdueix Z_t -expressió 5.7.6-, la funció de reflexió adopta la forma

$$\hat{R}_{fo} = \frac{-S_t \{ (Z_{to} + Z_0) - (Z_{to} - Z_0) e^{-j2kh_t} \}}{(2 S_t + S_t) (Z_{to} + Z_0) + (2 S_t - S_t) (Z_{to} - Z_0) e^{-j2kh_t}} \quad (5.7.9)$$

I si s'accepta com a impedància a l'extrem de sortida del forat, Z_{fo} ,

l'aproximació establerta a l'apartat anterior per a l'extrem obert de l'instrument -expressió 5.6.14-

$$\hat{R}_{fo} = -b_1 - (4 b_1 S_t a^2) \frac{e^{-j2kh_f}}{(2 S_t + S_f) (j\omega + a)^2 - (2 S_t - S_f) a^2 e^{-j2kh_f}} \quad , \quad (5.7.10)$$

amb $a = Ke/d_f$ i $b_1 = S_f/(2 S_t + S_f)$.

Els dos termes que constitueixen l'expressió 5.7.10 descriuen la manera en que s'estableix la reflexió en un forat obert. Quan una ona incident arriba a la secció on es troba el forat es produeix una primera reflexió causada per l'acoblament entre el forat i el tub. Aquesta reflexió, que ve representada pel primer terme de l'expressió, es defineix mitjançant un impuls negatiu de valor b_1 i seria l'única reflexió existent si es considerés que l'extrem de sortida del forat actua com una terminació anecòica -és a dir $Z_{fo} = Z_0$ -. Al mateix temps part de l'ona transmesa es propaga a l'interior del forat, i és reflectida a l'extrem de sortida, tornant enrera i generant una nova reflexió en arribar a la secció d'unió. Aquest fenomen es repeteix successivament de manera que les continuades reflexions que tenen lloc a l'interior del forat generen un seguit de reflexions a l'interior del tub, les quals constitueixen la reflexió global provocada pel comportament acústic del forat.

El segon terme de l'expressió 5.7.10 representa aquesta segona reflexió. L'exponencial complexa del numerador descriu el retard corresponent al temps que tarda la primera ona de pressió en anar i tornar al llarg del forat, mentre el denominador descriu les successives reflexions originades de la manera exposada.

L'expressió 5.7.10 es pot reescriure com

$$\hat{R}_{fo} = -b_1 - 2 b_1 a^2 (1-b_1) \frac{e^{-\tau j\omega}}{(j\omega + a)^2 - b_2 a^2 e^{-\tau j\omega}} \quad , \quad (5.7.11)$$

amb $b_2 = 1 - 2 b_1$ i $\tau = 2 h_f/c$.

La presència d'una exponencial complexa en el denominador del segon terme fa inviable la obtenció analítica simple de la TF^{-1} . Per aixó s'ha optat per desenvolupar en sèrie l'exponencial del denominador i prendre l'aproximació de primer ordre, ja que per a les dimensions usals dels forats del tible i de la tenora, la constant τ és inferior a 9×10^{-5} s :

$$e^{-\tau j\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\tau^n (j\omega)^n}{n!} \quad (5.7.12)$$

Aquesta aproximació actua com a filtre passabaixos i fa que en la funció de reflexió temporal no aparegui l'efecte de les successives reflexions que tenen lloc dins el forat, les quals es produeixen amb una periodicitat τ molt petita. Malgrat tot l'aproximació és vàlida ja que la radiació a l'extrem de sortida del forat i a l'extrem obert de l'instrument, així com l'esmoreïment, fan que aquestes reflexions tinguin poca incidència en la resposta impulsional.

En introduir l'aproximació de primer ordre al segon terme de l'expressió 5.7.11 s'obté:

$$\frac{e^{-\tau j\omega}}{(j\omega+a)^2 - b_2 a^2 (1-\tau j\omega)} = \frac{e^{-\tau j\omega}}{(j\omega - s_1)(j\omega - s_2)} \quad (5.7.13)$$

on

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{a}{2} \{ -(2 + b_2 a \tau) \pm \sqrt{(2 + b_2 a \tau)^2 - 8 b_1} \} \quad .$$

I finalment la funció de reflexió temporal obtinguda en aplicar la TF^{-1} és

$$R_{fo}(t) = -b_1 \delta(t) - \frac{2 b_1 a^2 (1 - b_1)}{(s_1 - s_2)} \{ e^{s_1(t-\tau)} - e^{s_2(t-\tau)} \} \quad (5.7.14)$$

A la figura 5.7-3 es comparen les funcions $R_{fo}(t)$ obtingudes a partir de $\hat{R}_{fo}(\omega)$ i la FFT^{-1} amb les calculades mitjançant l'expressió 5.7.14, per a diferents dimensions de forat obert en un tub cilíndric de 20 mm de diàmetre. La funció freqüencial $\hat{R}_{fo}(\omega)$ s'ha determinat fins a una freqüència màxima de 17 kHz.

Per al cas del forat amb una alçada $h_f=8$ mm, s'observa com la reflexió obtinguda numèricament mostra les reflexions originades a l'interior del forat.

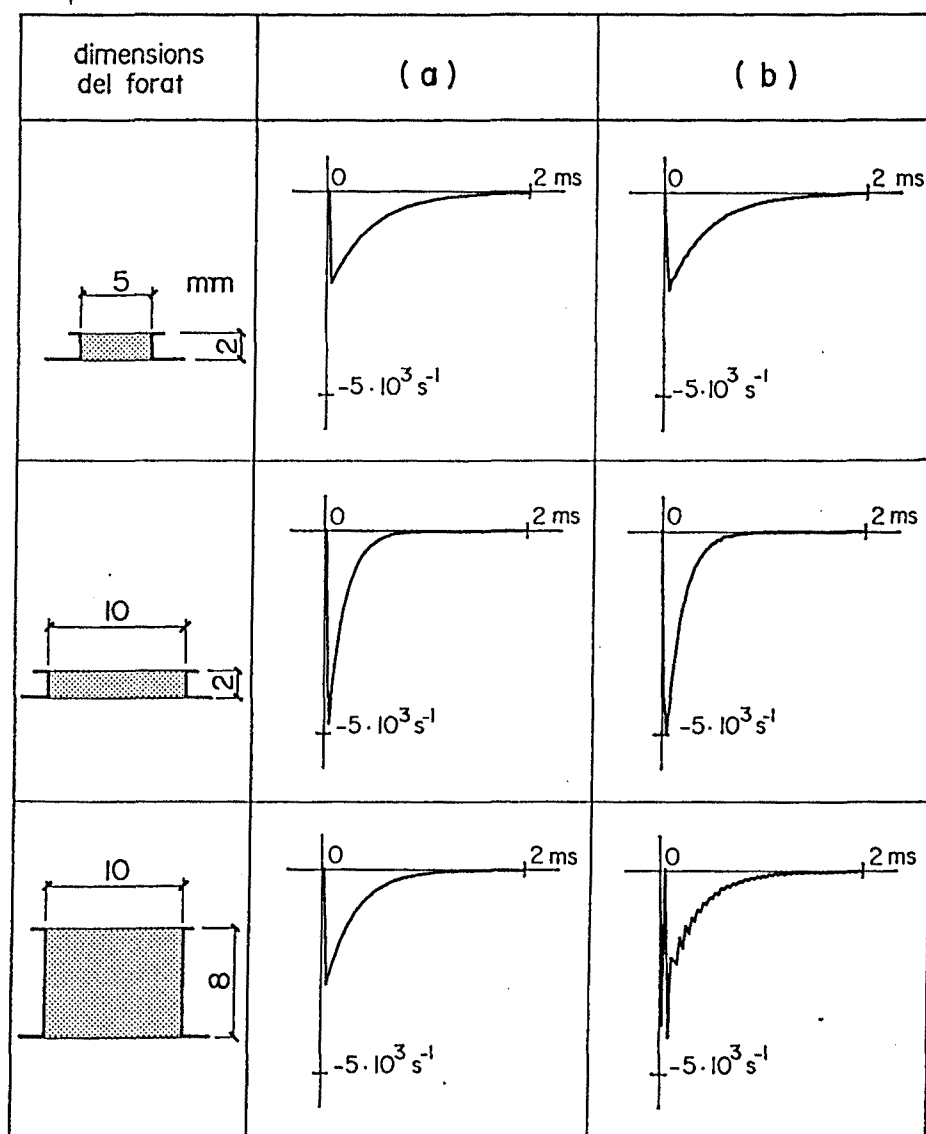


Fig. 5.7-3 Comparació entre les funcions de reflexió $R_{fo}(t)$ determinades segons l'expressió 5.7.14 (a), o bé numèricament (b), per a diferents dimensions d'un forat obert en un tub cilíndric de diàmetre = 20 mm.

5.8. REFLEXIÓ DEGUDA A UN FORAT TAPAT.

La modificació que representa un forat tapat en la impedància acústica de l'instrument a la secció on es troba situat també ha estat modelitzat per Keefe mitjançant dues impedàncies en sèrie i una en paral·lel, definides de forma anàloga a com s'ha fet per a un forat obert (Keefe 1982 a i b). També en aquest cas la complexitat de les expressions obtingudes aconsella emprar una altra formulació.

Si es suposa que les dimensions del forat són petites comparades amb la longitud d'ona de les freqüències usals, es pot considerar que un forat tapat actua com un petit volum d'aire, la compressibilitat del qual introdueix una elasticitat adicional a la secció de la columna d'aire on es situa el forat. Per altra banda, part de l'aire de l'interior del forat passa a través de la secció d'unió entre tub i forat i participa així en el moviment de l'aire del tub.

Aquestes consideracions porten a modelitzar el comportament dinàmic del forat anàlogament a com ho faria una massa i una rigidesa equivalents intercalades a la secció del tub on es troba el forat (Cardona 1980, Nederveen 1969). La figura 5.8-1 mostra la geometria d'un forat tapat en un tub cònic i la figura 5.8-2 representa el sistema massa-rigidesa que modelitza el forat. Els extrems "a" i "b" d'aquest sistema corresponen a les seccions dels trams "a" i "b" situades a $r=r_f$, entre les quals es produeix la discontinuïtat en la impedància.

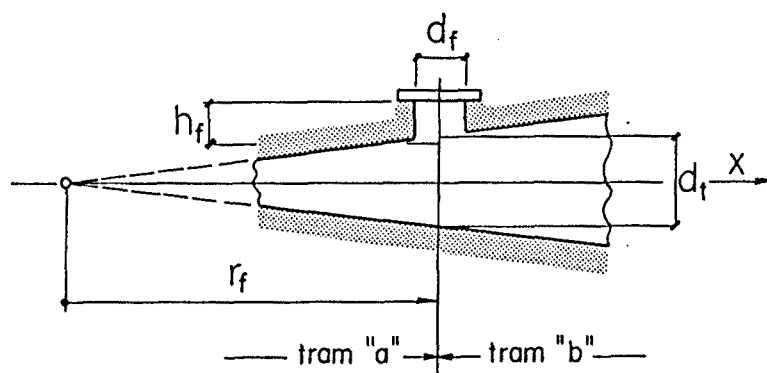


Fig. 5.8-1 Dimensions d'un forat tapat en un tub cònic.

La modelització del forat tapat mitjançant el sistema massa-rigidesa es pot relacionar amb l'analogia elèctrica proposada per Keefe. Per això només cal definir el quadripol de la figura 5.7-2 com dues inductàncies en sèrie, que juguen el paper de massa equivalent, i una capacítància en paral·lel, que juga el paper de rigidesa equivalent. A la mateixa figura 5.8-2 es representa aquesta analogia.

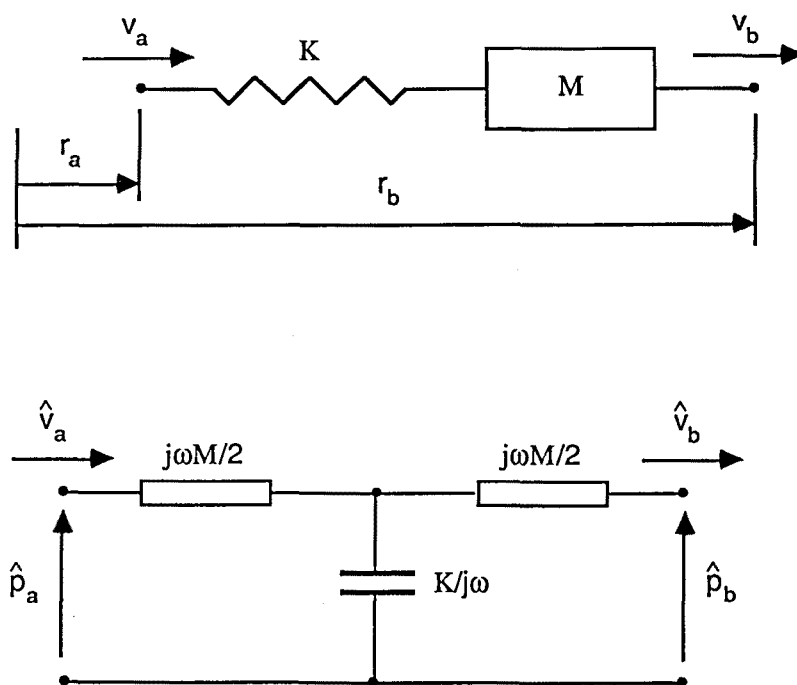


Fig. 5.8-2 Analogies mecànica i elèctrica representatives del comportament dinàmic d'un forat tapat.

La massa equivalent, definida per unitat de secció del tub, representa la fracció de la massa d'aire dins el forat que participa del moviment de la columna d'aire, i es determina d'acord amb l'expressió

$$M = \frac{v \rho_0 V_f}{S_t} , \quad (5.8.1)$$

on V_f és el volum del forat, S_t és l'àrea del tub a la secció del forat i v és el coeficient d'acoblament, comprès entre 0 i 1, que determina la fracció de massa d'aire del forat que es mou dins el tub principal. Nederveen proposa un coeficient d'acoblament per als forats dels instruments de vent definit per (Nederveen 1969)

$$v = 0,1 d_f / h_f \quad . \quad (5.8.2)$$

La rigidesa equivalent es defineix a partir de la compressibilitat de l'aire dins el forat, suposant que tot ell es comprimeix linealment sota la pressió de la columna d'aire a l'indret del forat. El mòdul de compressibilitat de l'aire és

$$\chi = \frac{1}{V_f} \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad , \quad (5.8.3)$$

i el desplaçament a l'interior del tub de l'aire provinent del forat és per tant

$$\Delta r = \frac{\Delta V}{S_t} = \frac{V_f \chi \Delta p}{S_t} \quad . \quad (5.8.4)$$

Finalment la rigidesa equivalent s'estableix com

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta r} = \frac{S_t}{V_f \chi} \quad . \quad (5.8.5)$$

L'equació del moviment del conjunt massa-rigidesa per al cas de moviment sinusoïdal de freqüència angular ω , i suposant com a sentit positiu de la velocitat el de r creixent, és

$$\hat{p}_a - \hat{p}_b = j\omega M \hat{v}_b \quad \text{amb} \quad \hat{p}_a = K (\hat{r}_a - \hat{r}_b) = \frac{K}{j\omega} (\hat{v}_a - \hat{v}_b) \quad . \quad (5.8.6)$$

Aquestes dues expressions determinen la relació entre les impedàncies acústiques dels trams "a" i "b" definides a la secció del forat:

$$Z_a = \frac{Z_b + M j\omega}{1 + Z_b j\omega/k - \omega^2 M/K} \quad (5.8.7)$$

Si es considerés la configuració alternativa en la qual la massa i la rigidesa equivalents invertissin la seva col.locació -figura 5.8-3- es demostra que s'obté la mateixa relació d'impedàncies.

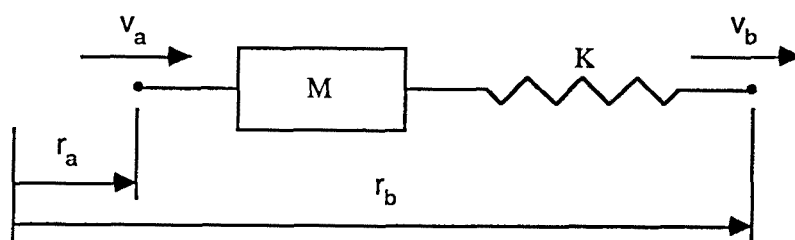


Fig. 5.8-3 Configuració alternativa de l'analogia mecànica de forat tapat.

El terme funció de ω^2 es pot negligir en dependre del volum del forat al quadrat, el qual, per a les dimensions usals dels forats, és petit comparat amb els altres termes. D'aquesta manera s'obté

$$Z_a = \frac{Z_b + M j\omega}{1 + Z_b j\omega/k} \quad (5.8.8)$$

Aquesta mateixa expressió es dedueix a partir de l'analogia elèctrica si a l'expressió 5.7.2 s'introdueixen els valors de les impedàncies Z_s i Z_p presentats a la figura 5.8-2.

Si es substitueixen M i K per les seves respectives expressions i s'introdueix a més la relació de la velocitat de propagació del so en camp lliure amb el mòdul de compressibilitat i la densitat de l'aire, $c = (\chi P_0)^{-1/2}$, l'expressió 5.8.8 es converteix finalment en

$$Z_a = Z_0 \frac{Z_b + j\nu k Z_0 V_f / S_t}{Z_0 + j k Z_b V_f / S_t} , \quad (5.8.9)$$

on $k=\omega/c$ és el número d'ona.

La funció que descriu la reflexió produïda pel forat tapat s'obté, de manera anàloga a com es va fer per a un forat obert, considerant que Z_b és la impedància d'ones esfèriques en camp lliure -expressió 5.4.1-. L'impedància Z_a és aleshores

$$Z_a = Z_0 \frac{1 + j\nu k (1-j/kr_f) V_f / S_t}{(1-j/kr_f) + j k V_f / S_t} . \quad (5.8.10)$$

I en introduir Z_a a la funció general de reflexió -expressió 5.2.23- s'obté la funció de reflexió per a un forat tapat

$$\hat{R}_{ft}(\omega) = \frac{\frac{(\nu-1)}{(\nu+1)} (j\omega)^2 + \frac{2\nu c}{r_f(\nu+1)} j\omega + \frac{\nu c^2}{r_f^2(\nu+1)}}{(j\omega)^2 + \frac{2S_t c}{V_f(\nu+1)} j\omega - \frac{\nu c^2}{r_f^2(\nu+1)}} . \quad (5.8.11)$$

La corresponent forma temporal, obtinguda per mitjà de la TF^{-1} , és

$$R_{ft}(t) = TF^{-1}[\hat{R}_{ft}(\omega)] = W \delta(t) + b_1 e^{s_1 t} - b_2 e^{s_2 t} , \quad (5.8.12)$$

amb

$$W = (\nu-1) / (\nu+1)$$

$$b_1 = \frac{1}{(\nu+1)(s_1 - s_2)} \left[(\nu-1) s_1^2 + \frac{2\nu c}{r_f} s_1 + \frac{\nu c^2}{r_f^2} \right] \quad (5.8.13)$$

$$b_2 = \frac{1}{(\nu+1)(s_1 - s_2)} \left[(\nu-1) s_2^2 + \frac{2\nu c}{r_f} s_2 + \frac{\nu c^2}{r_f^2} \right] ,$$

i amb

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{c}{(v+1)} \left[-\frac{S_t}{V_f} \pm \sqrt{\frac{S_t^2}{V_f^2} + \frac{v(v+1)}{r_f^2}} \right] \quad (5.8.14)$$

Per al cas d'un forat situat en un tub cilíndric la funció de reflexió es simplifica considerablement ja que, imposant $r_f \rightarrow \infty$, s'obté

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 & s_2 &= -\frac{2 c S_t}{(v+1) V_f} \\ b_1 &= 0 & b_2 &= -W s_2 \end{aligned} \quad (5.8.15)$$

i per tant

$$R_{ft}(t) = W [\delta(t) + s_2 e^{s_2 t}] \quad (5.8.16)$$

Els forats que presenten el tible i la tenora són de reduïdes dimensions si es comparen amb la coordenada r_f que els situa. Aquest fet permet acceptar com a vàlida l'expressió 5.8.16 tant si el tram on es troba el forat és cilíndric com si és cònic.

Com a exemple la taula 5.8-I recull les dimensions i els paràmentres de la funció $R_{ft}(t)$, determinats per mitjà d'ambdues expressions, per al cas del forat del Sol₂ de la tenora, forat que per ser el més gran de la tenora i estar situat al pavelló representa el cas més desfavorable pel que fa a l'aproximació, i pel cas del primer forat de registre, el més petit de la tenora.

S'observa com per al cas més desfavorable -forat del Sol₂- l'error comès en acceptar l'expressió 5.8.16 és inferior al 9%.

Dels resultats de la taula 5.8-I també es dedueix que a mesura que el forat decreix en dimensions l'exponencial de l'expressió 5.8.16 tendeix a ser un impuls negatiu unitari que contrarresta l'impuls positiu $\delta(t)$. La reflexió tendeix per tant a desaparèixer.

Taula 5.8-I. Dimensions i paràmetres de la funció de reflexió de forat tapat en un tub cònic -expressió 5.8.12- i en un tub cilíndric -expressió 5.8.16- per als forats més gran i més petit de la tenora.

Forat del Sol₂ de la tenora.

<u>Dimensions:</u>	<u>Expressió 5.8.12:</u>	<u>Expressió 5.8.16:</u>
$d_f = 28 \text{ mm}$	$s_1 = 34,9 \text{ s}^{-1}$	$s_1=0$
$h_f = 5,5 \text{ mm}$	$s_2 = -37.029 \text{ s}^{-1}$	$s_2 = -36.994 \text{ s}^{-1}$
$d_t = 37,8 \text{ mm}$	$b_1 = 36,9$	$b_1 = 0$
$r_f = 273,3 \text{ mm}$	$b_2 = -22.804$	$b_2 = -24.847$
	$v = 0,51$	$W = -0,3245$

Primer forat de registre de la tenora.

<u>Dimensions:</u>	<u>Expressió 5.8.12:</u>	<u>Expressió 5.8.16:</u>
$d_f = 2 \text{ mm}$	$s_1 = 7,33 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$	$s_1=0$
$h_f = 3 \text{ mm}$	$s_2 = -5.857.031 \text{ s}^{-1}$	$s_2 = -5.857.031 \text{ s}^{-1}$
$d_t = 10,5 \text{ mm}$	$b_1 = 7,23 \times 10^{-3}$	$b_1 = 0$
$r_f = 413 \text{ mm}$	$b_2 = -5.125.005$	$b_2 = -5.124.902$
	$v = 0,067$	$W = -0,8744$

5.9. FUNCIÓ D'ESMORTEÏMENT.

La formulació emprada per a descriure la propagació d'ones planes i esfèriques s'ha determinat sota la hipòtesi de la inexistència de resistències passives. En realitat la presència de resistències passives fa que el rendiment dels instruments musicals de vent, definit com la relació entre l'energia radiada en forma de so i la introduïda per l'instrumentista, sigui molt baix - fins de l'ordre del 0,1% (Nederveen 1969)-.

Les resistències passives són atribuïbles a tres causes diferents: La viscositat de l'aire, el freg de l'aire amb les parets laterals del tub i la conductivitat tèrmica de les parets. L'efecte que produeixen sobre la propagació d'ones és la d'un esmorteïment selectiu funció de la freqüència. Les ones disminueixen d'amplitud i es retarden, essent aquest efecte més acusat per a les components de freqüència més elevada.

En el cas concret de les parets, la seva conductivitat tèrmica és molt més elevada que la de l'aire. Això fa que les parets actuïn com a camins de transmissió des de els punts on hi ha sobrepressió als punts on hi ha depressió, esmorteïnt d'aquesta manera l'ona.

Kirchhoff establí per primera vegada una teoria completa de la propagació d'ones planes en tubs cilíndrics, incloent-hi l'efecte de la viscositat de l'aire i de la conductivitat tèrmica de les parets. Zwikker i Kosten establiren una formulació analítica general que recull gairebé totes les formulacions proposades per altres autors. Nederveen, a partir de la formulació dels autors abans esmentats i considerant que els efectes tèrmics i viscosos són importants només en zones properes a les parets, estableix la següent equació d'ona per a descriure la propagació d'ones planes en tubs cilíndrics (Nederveen 1967):

$$\left[\partial_{xx} + k^2 (1 + 2(1-j) \frac{Q}{k}) \right] p = 0 \quad , \quad (5.9.1)$$

on k és el número d'ona, i

$$Q = \frac{1}{d} \left[\frac{2 \eta \omega}{\gamma p_0} \right]^{1/2} \left[1 + (\gamma - 1) (\lambda / C_p \eta)^{1/2} \right] \quad , \quad (5.9.2)$$

amb

d = diàmetre del tub.

p_0 = pressió estàtica.

γ = relació de calors específiques.

C_p = calor específica a pressió constant.

η = coeficient de viscositat de l'aire.

λ = conductivitat tèrmica de les parets.

Nederveen formula una equació anàloga per a tubs cònics sota la hipòtesi que la conicitat dels instruments musicals és petita i que per tant les ones són pràcticament planes, i n'obté les solucions generals per a ambdós casos.

Malgrat disposar d'aquestes solucions, la seva complexitat fa preferible emprar una formulació més simple derivada de la formulació d'ones planes en tubs cilíndrics sense esmorteïment. A tal fi s'accepta que l'amplitud de les dues ones solució presentades a les expressions 5.2.5 i 5.2.6 estàn afectades per un factor d'esmoreïment funció de la coordenada longitudinal x , que modelitza la disminució d'amplitud i el retard sofert per les ones.

El camp de la pressió es descriu així mitjançant

$$\begin{aligned}\hat{p}_- &= A_- e^{-\hat{\zeta}x} e^{-j(kx + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} \\ \hat{p}_+ &= A_+ e^{\hat{\zeta}x} e^{j(kx + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)}\end{aligned}\quad (5.9.3)$$

on \hat{p}_- i \hat{p}_+ són les ones solució que es propaguen en el sentit de x creixent i de x decreixent respectivament, i $\hat{\zeta}$ és el coeficient d'esmoreïment definit com

$$\hat{\zeta} = \zeta (1 + j) \quad \text{amb} \quad \zeta = \zeta_0 \frac{\sqrt{k}}{c d} \quad , \quad (5.9.4)$$

essent d el diàmetre del tub i ζ_0 una constant d'esmoreïment determinada a partir de mesures experimentals.

La part real de $\hat{\zeta}$ representa l'atenuació de l'amplitud de l'ona, mentre la part imaginària representa el retard que introdueix l'esmoreïment.

L'expressió del coeficient de reflexió s'escolleix de manera que el camp de la pressió compleixi l'equació d'ona

$$[\partial_{xx} + k^2 (1 + \frac{\zeta}{k} (1-j))^2] p = 0 \quad , \quad (5.9.5)$$

la qual, si es negligeix el terme $(\zeta/k)^2$ que s'obté en desenvolupar el quadrat, passa a ser idèntica a l'equació de Nederveen en considerar $Q=\zeta$

$$[\partial_{xx} + k^2(1+2(1-j)\frac{\zeta}{k})]p=0 \quad (5.9.6)$$

Es per aquesta raó que el valor de ζ s'escolleix directament proporcional a l'arrel quadrada de la freqüència angular i inversament proporcional al diàmetre del tub, tal com succeeix amb Q .

Segons diferents autors, el valor del terme Q/k és de l'ordre de 0,015 per a les freqüències més usals, la qual cosa justifica l'aproximació feta en negligir el terme $(\zeta/k)^2$.

El camp de la velocitat s'obté a partir del camp de la pressió per mitjà de l'equació de la quantitat de moviment -equació 5.2.7-

$$\hat{v}_- = \frac{1}{\rho_0 c} \frac{(k - j\hat{\zeta})}{k} A_- e^{-\hat{\zeta}x} e^{-j(kx + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.9.7)$$

$$\hat{v}_+ = -\frac{1}{\rho_0 c} \frac{(k - j\hat{\zeta})}{k} A_+ e^{\hat{\zeta}x} e^{j(kx + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)}$$

Per tal de considerar l'efecte de l'esmoreïment en el càlcul de la resposta impulsional per mitjà de la simulació del seu procés de generació, és necessari caracteritzar l'esmoreïment en el camp temporal. Per això s'ha determinat la funció temporal que descriu l'evolució de la forma d'ona causada per la presència de l'esmoreïment a mesura que l'ona es propaga al llarg del tub.

Cas de tubs cilíndrics.

La figura 5.9-1 representa un tram cilíndric de longitud "L" limitat per dues seccions situades a les coordenades longitudinals x_1 i x_2 .

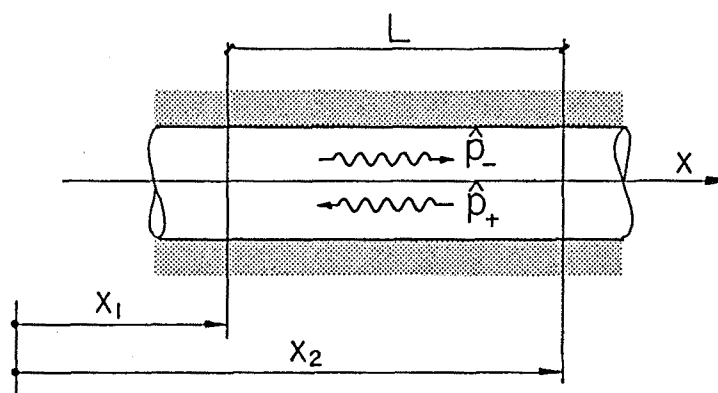


Fig. 5.9-1 Localització de les seccions extremes en un tram cilíndric.

Per a una ona que es propagui en el sentit de x creixent -sentit positiu- la relació entre les pressions a les seccions situades a x_2 i x_1 estableix quin ha estat l'efecte de l'esmoreïment al llarg del tram:

$$\hat{\sigma}_- = \frac{\hat{p}_-(x_2)}{\hat{p}_-(x_1)} = \frac{e^{-\hat{\zeta}x_2} e^{-j(kx_2 + \psi)}}{e^{-\hat{\zeta}x_1} e^{-j(kx_1 + \psi)}} = e^{-(\hat{\zeta} + jk)(x_2 - x_1)} \quad (5.9.8)$$

Si l'ona es propaga en el sentit de x decreixent, la relació s'ha d'establir entre les pressions a x_1 i x_2 ja que ara la localització inicial de l'ona és x_2 :

$$\hat{\sigma}_+ = \frac{\hat{p}_+(x_1)}{\hat{p}_+(x_2)} = \frac{e^{\hat{\zeta}x_1} e^{j(kx_1 + \psi)}}{e^{\hat{\zeta}x_2} e^{j(kx_2 + \psi)}} = e^{(\hat{\zeta} + jk)(x_1 - x_2)} \quad (5.9.9)$$

Ambdós casos es poden recollir en una única expressió si s'introdueix la longitud del tram:

$$\hat{\sigma} = e^{-(\hat{\zeta} + jk)L} \quad \text{amb } L = |x_1 - x_2| > 0 \quad (5.9.10)$$

Cas de tubs cònics.

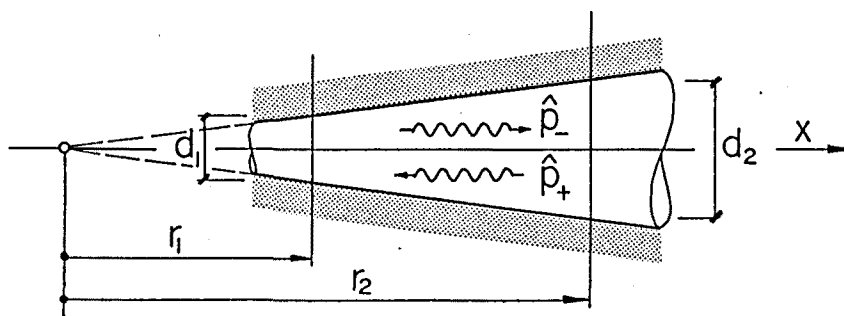


Fig. 5.9-2 Localització de les seccions extremes en un tram cònic.

Quan el tram és un tram cònic -figura 5.9-2-, s'accepta que l'esmoreïment actua en forma anàloga a com ho fa en un tram cilíndric. Es considera aleshores que el coeficient d'esmoreïment és inversament proporcional al diàmetre mitjà del tram

$$\hat{\zeta} = \zeta (1+j) \quad \text{amb} \quad \zeta = \zeta_0 \frac{2\sqrt{k}}{c(d_1 + d_2)} \quad (5.9.11)$$

I els camps de la pressió i de la velocitat són

$$\hat{p}_- = \frac{1}{r} A_- e^{-\hat{\zeta}x} e^{-j(kx + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.9.12)$$

$$\hat{p}_+ = \frac{1}{r} A_+ e^{\hat{\zeta}x} e^{j(kx + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\hat{v}_- = \frac{1}{r\rho_0 c} \left[\frac{k-j\hat{\zeta}}{k} - \frac{j}{kr} \right] A_- e^{-\hat{\zeta}r} e^{-j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.9.13)$$

$$\hat{v}_+ = -\frac{1}{r\rho_0 c} \left[\frac{k-j\hat{\zeta}}{k} + \frac{j}{kr} \right] A_+ e^{\hat{\zeta}r} e^{j(kr + \psi)} e^{j(\omega t + \phi)}$$

L'efecte de l'esmoreïment es descriu de nou mitjançant la relació entre les pressions de les dues ones \hat{p}_- i \hat{p}_+ a les seccions que limiten el tram, situades a les coordenades r_1 i r_2 :

$$\hat{\sigma}_- = \frac{A_- e^{-\hat{\zeta} r_2} e^{-j(kr_2 + \psi)} / r_2}{A_- e^{-\hat{\zeta} r_1} e^{-j(kr_1 + \psi)} / r_1} = \frac{r_1}{r_2} e^{-(\hat{\zeta} + jk)(r_2 - r_1)} \quad (5.9.14)$$

$$\hat{\sigma}_+ = \frac{A_+ e^{\hat{\zeta} r_1} e^{j(kr_1 + \psi)} / r_1}{A_+ e^{\hat{\zeta} r_2} e^{j(kr_2 + \psi)} / r_2} = \frac{r_2}{r_1} e^{(\hat{\zeta} + jk)(r_1 - r_2)} \quad (5.9.15)$$

Ambdues relacions es resumeixen a l'expressió general

$$\hat{\sigma} = B e^{-(\hat{\zeta} + jk)L} \quad \text{amb } L = |r_1 - r_2| > 0 \quad , \quad (5.9.16)$$

on B és la relació entre les coordenades radials r_1 i r_2 que limiten el tram. B també és pot definir com la relació entre els diàmetres de les seccions, amb el que finalment s'obté.

$B = r_1/r_2 = d_1/d_2$ quan l'ona es propaga en sentit positiu.

$B = r_2/r_1 = d_2/d_1$ quan l'ona es propaga en sentit negatiu.

Si es defineix com a sentit positiu el de r decreixent -figura 5.9-3- es demostra que l'expressió 5.9.17 continua essent vàlida simplement considerant que r_1 i r_2 són negatius d'acord amb el conveni de signes establert per als tubs cònics.

L'expressió 5.9.16 es pot reescriure com

$$\hat{\sigma} = B e^{-\hat{\zeta} L} e^{-j(\hat{\zeta} + k)L} \quad (5.9.17)$$

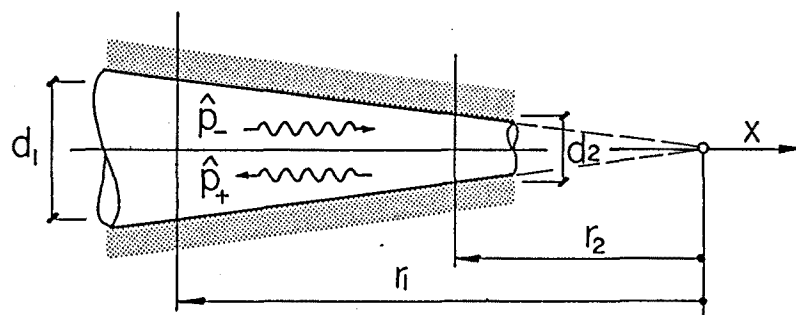


Fig. 5.9-3 Localització de les seccions extremes en un tram cònic de radi decreixents en el sentit positiu.

La primera exponencial, real de constant negativa, representa l'efecte atenuador de l'esmoreïment. La segona, complexa, representa el retard, el qual inclou el retard introduït per l'esmoreïment i el temps que tarda l'ona en propagar-se d'un extrem a l'altre del tram.

La descripció temporal de l'esmoreïment s'obté en aplicar la TF^{-1} a l'expressió 5.9.17 (Abramowitz 1965):

$$\sigma(t) = TF^{-1}[\hat{\alpha}(\omega)] = \frac{B \xi}{2\sqrt{\pi} (t - L/c)^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2}{4(t - L/c)}} \quad (5.9.18)$$

amb

$$\xi = \frac{\sqrt{2} \zeta_0 L}{c^{3/2} d} \quad i \quad d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

Si el tram on es troba situat el forat és cilíndric, l'expressió és igualment vàlida en considerar $B=1$.

La funció 5.9.18 és una funció d'àrea unitària que descriu la forma adoptada per un impuls unitari de pressió quant aquest s'ha propagat una distància "L" a partir de la seva localització inicial. La figura 5.9-4 mostra l'evolució de la forma d'ona d'un impuls unitari de pressió a mesura que aquest es propaga a

l'interior d'un tub cilíndric de 10 mm de diàmetre. La figura s'ha obtingut emprant l'expressió anterior i les dades $c=340 \text{ ms}^{-1}$ i $\zeta_0=0,135$, valor de la constant d'esmoreïment estimada per S. Cardona a partir de la mesura experimental de la impedància acústica de tubs cilíndrics (Cardona 1980).

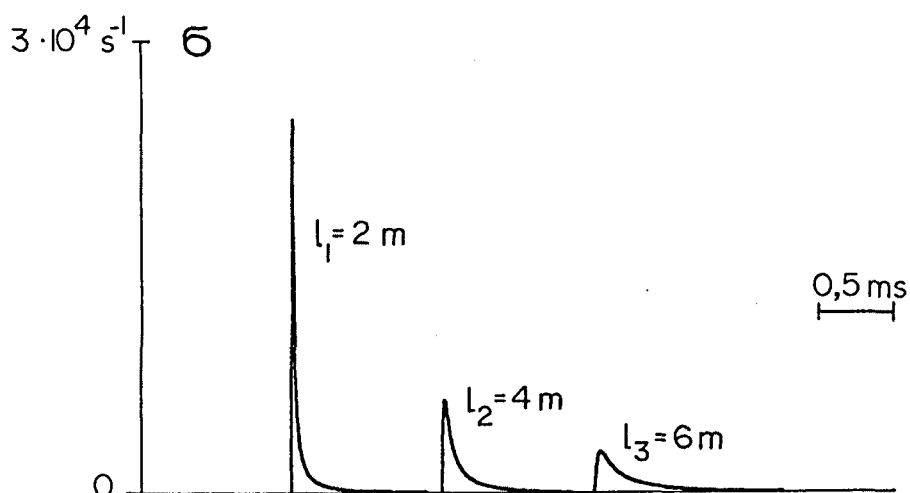


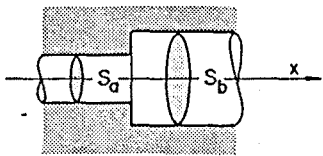
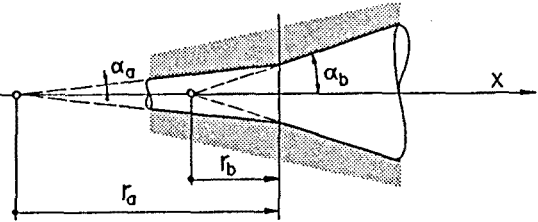
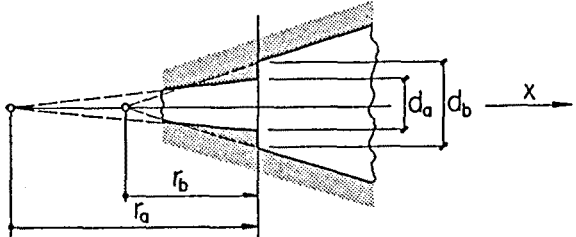
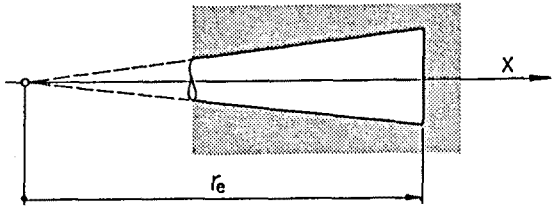
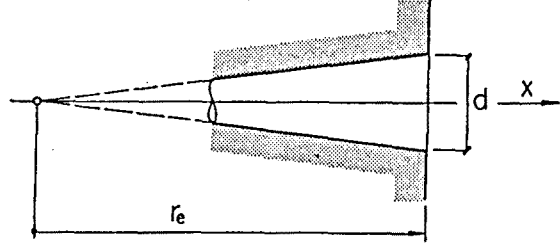
Fig. 5.9-4 Evolució de la forma d'ona d'un impuls unitari de pressió a mesura que aquest es propaga a l'interior d'un tub cilíndric.

5.10. SÍNTESI DE LA RESPOSTA IMPULSIONAL. MÈTODE DE LA MULTICONVOLUCIÓ.

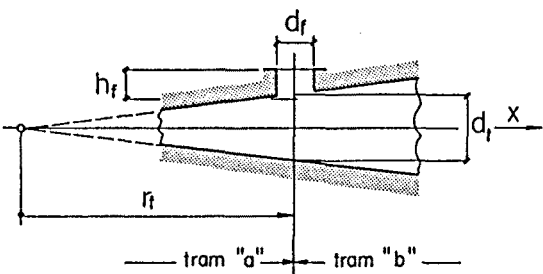
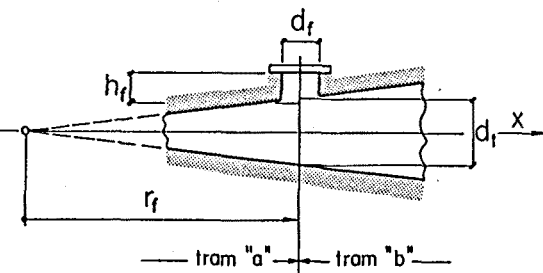
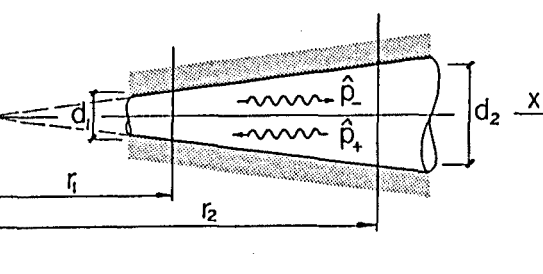
En els apartats anteriors s'han establert les funcions temporals que descriuen les reflexions provocades en les discontinuïtats del perfil interior de l'instrument i en els seus extrems, així com la funció representativa de l'efecte de l'esmoreïment. La taula 5.10-I és un resum de tota la formulació establerta.

Emprant aquestes funcions s'ha bastit un mètode de càlcul que simula el procés de generació de la resposta impulsional. Aquest mètode consisteix en el seguiment temporal de la propagació de l'ona inicial de pressió, produïda en

Taula 5.10-I Recull de les funcions de reflexió i d'esmoreïment obtingudes al llarg del capítol.

	<p>CANVI DE DIÀMETRE</p> $R_d(t) = \frac{S_a - S_b}{S_a + S_b} \delta(t)$						
	<p>CANVI DE CONICITAT</p> $R_c(t) = v e^{vt} \quad \text{amb} \quad v = \frac{(r_b - r_a) c}{2 r_a r_b}$						
	<p>CANVI DE DIÀMETRE I DE CONICITAT</p> $R_c(t) = \frac{B-1}{B+1} \delta(t) + \frac{2B}{B+1} v e^{vt}$ <p>amb</p> $B = S_a / S_b$ $v = \frac{c}{B+1} \left(\frac{B r_b - r_a}{r_a r_b} \right)$						
	<p>EXTREM TANCAT</p> <table><tr><td><u>Tub cilíndric</u></td><td><u>Tub cònic</u></td></tr><tr><td>$R_{et}(t) = \delta(t)$</td><td>$R_{et}(t) = \delta(t) + 2 v e^{vt}$</td></tr><tr><td></td><td>amb $v = c / r_e$</td></tr></table>	<u>Tub cilíndric</u>	<u>Tub cònic</u>	$R_{et}(t) = \delta(t)$	$R_{et}(t) = \delta(t) + 2 v e^{vt}$		amb $v = c / r_e$
<u>Tub cilíndric</u>	<u>Tub cònic</u>						
$R_{et}(t) = \delta(t)$	$R_{et}(t) = \delta(t) + 2 v e^{vt}$						
	amb $v = c / r_e$						
	<p>EXTREM OBERT</p> <table><tr><td><u>Tub cilíndric</u></td><td><u>Tub cònic</u></td></tr><tr><td>$R_{eo}(t) = -a^2 t e^{-at}$</td><td>$R_{eo}(t) = -b^2 t e^{-bt}$</td></tr><tr><td>amb $a = \frac{K e}{d}$</td><td>amb $b = \left(a - \frac{c}{2 r_e} \right)$</td></tr></table>	<u>Tub cilíndric</u>	<u>Tub cònic</u>	$R_{eo}(t) = -a^2 t e^{-at}$	$R_{eo}(t) = -b^2 t e^{-bt}$	amb $a = \frac{K e}{d}$	amb $b = \left(a - \frac{c}{2 r_e} \right)$
<u>Tub cilíndric</u>	<u>Tub cònic</u>						
$R_{eo}(t) = -a^2 t e^{-at}$	$R_{eo}(t) = -b^2 t e^{-bt}$						
amb $a = \frac{K e}{d}$	amb $b = \left(a - \frac{c}{2 r_e} \right)$						

Taula 5.10-I Continuació.

	<p>FORAT OBERT</p> $R_{fo}(t) = -b_1 \delta(t) - K_{fo} [e^{s_1(t-\tau)} - e^{s_2(t-\tau)}]$ <p>amb $a = K e / d_f \quad \tau = 2 h_f / c$</p> $b_1 = \frac{S_f}{2 S_t + S_f} \quad b_2 = 1 - 2 b_1$ $K_{fo} = \frac{2 b_1 a^2 (1 - b_1)}{(s_1 - s_2)}$
	<p>FORAT TAPAT</p> $R_{ft}(t) = W [\delta(t) + s e^{st}]$ <p>amb $W = \frac{(v-1)}{(v+1)} \quad v = 0,1 d_f / h_f$</p> $s = - \frac{2 c S_t}{(v+1) V_f}$
	<p>FUNCIO D'ESMORTEÏMENT</p> $\sigma(t) = \frac{B \xi}{2 \sqrt{\pi} (t - L/c)^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2}{4(t-L/c)}}$ <p>amb $\xi = \frac{2 \sqrt{2} \zeta_0 L}{c^{3/2} (d_1 + d_2)}$</p> <p>$B = 1$ per a tubs cilíndrics. $B =$ relació de diàmetres per a tubs cònics.</p>

introduir un impuls unitari de velocitat a la secció d'entrada, i de les successives reflexions que es produeixen.

En el càlcul es considera que el tub de l'instrument està format per un conjunt de trams cilíndrics i cònics, i es modelitza el pavelló mitjançant una successió de trams cònics. També es considera que els forats, degut a les seves reduïdes dimensions, actuen introduint una discontinuïtat en la impedància del tub a la secció on es situa l'eix del forat.

La figura 5.10-1 mostra el perfil característic d'un instrument així com la numeració emprada per a definir les diferents discontinuïtats i els diferents trams. S'escolleix com a sentit positiu de la velocitat el que va de l'extrem d'entrada en el tudell fins a l'extrem de sortida en el pavelló.

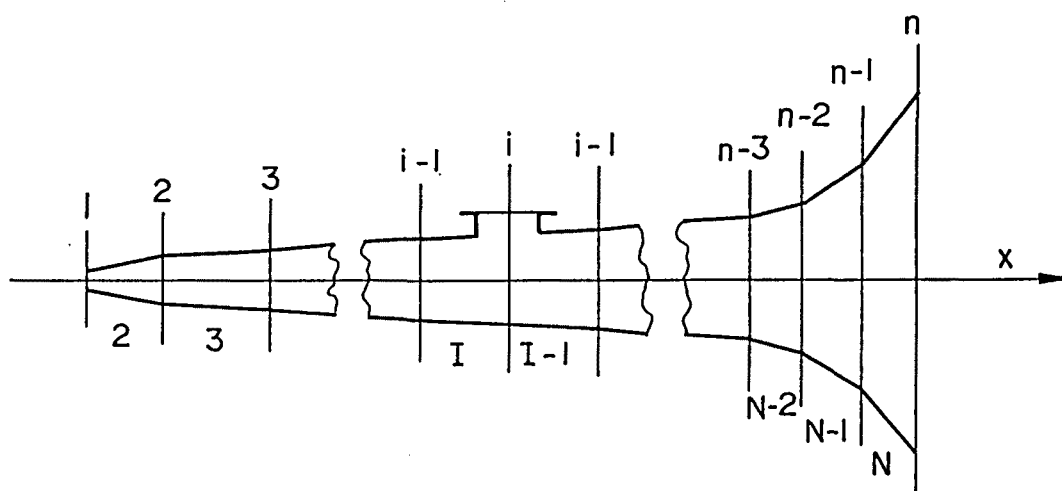


Fig. 5.10-1 Modelització del perfil interior d'un instrument i numeració dels diferents trams i discontinuïtats.

El programa de càlcul desenvolupat es basa en el seguiment temporal de dues ones que es propaguen a l'interior del tub. Cadascuna d'elles és la resultant de superposar les reflexions que es produeixen successivament en les discontinuïtats i que es propaguen en un mateix sentit al llarg del tub. Per tal de representar ambdues ones resultants s'empra una discretització espacial en la direcció longitudinal del tub de l'instrument definida mitjançant dos

registres, els termes dels quals són les pressions corresponents a cada ona en cadascuna de les seccions que resulten de la discretització.

El programa inicia el càlcul determinant quina és la pressió de l'ona inicial produïda en introduir un impuls unitari de velocitat a la secció d'entrada. Si el tram on hi ha l'extrem d'entrada és cilíndric, l'impuls unitari de velocitat porta associat un impuls de pressió de valor Z_0 ja que en l'instant inicial les discontinuïtats que presenta el tub no afecten l'ona, i per tant aquesta es genera en forma anàloga a com succeeix en camp lliure. En ser Z_0 la impedància acústica d'ones planes en camp lliure, es compleix

$$\hat{p}(\omega) = Z_0 \hat{v}(\omega) \xrightarrow{TF^{-1}} p(t) = Z_0 \delta(t) * v(t) = Z_0 \delta(t) \quad , \quad (5.10.1)$$

ja que en ser la velocitat inicial un impuls unitari, $v(t) = \delta(t)$.

Si el tram on es situa l'extrem d'entrada és cònic, la impedància que cal considerar és la d'ones esfèriques en camp lliure, d'on s'obté

$$\hat{p}(\omega) = \frac{Z_0}{1 - j/k r_e} \hat{v}(\omega) \quad , \quad (5.10.2)$$

on r_e és la distància del vèrtex del con a la secció d'entrada. I en aplicar la TF^{-1} s'obté finalment

$$p(t) = Z_0 \left(\delta(t) - \frac{c}{r_e} e^{-ct/r_e} \right) * v(t) = Z_0 \left(\delta(t) - \frac{c}{r_e} e^{-ct/r_e} \right) \quad . \quad (5.10.3)$$

La pressió de l'ona inicial presenta, a més d'un impuls, una estela definida per una exponencial negativa decreixent quan $r_e > 0$, o una exponencial positiva creixent quan $r_e < 0$. En el cas del tible i la tenora, en presentar el tudell una obertura decreixent vers la secció d'entrada, $r_e > 0$ i per tant l'estela és negativa.

El pas següent és la definició de les funcions de reflexió i d'esmoreïment. Per a cada discontinuïtat es defineixen:

. Les funcions que descriuen l'ona reflectida en la discontinuïtat per als casos en que l'ona incident es propaga en sentit positiu -funció $R_+(t)$ - o bé en sentit negatiu -funció $R_-(t)$ -.

. Les funcions que descriuen l'ona transmesa, la que es propaga en el mateix sentit que l'ona incident, també per als casos en que l'ona incident es propaga en un sentit o bé en l'altre. Aquestes funcions s'estableixen a partir de les funcions de reflexió en considerar que la pressió en ambdós cantons de la discontinuïtat ha d'esser la mateixa. Si es suposa que l'ona incident es propaga en sentit positiu -figura 5.10-2- es compleix

$$\hat{p}_{a+} + \hat{p}_{a-} = \hat{p}_{b-} \quad , \quad (5.10.4)$$

i per tant la relació entre l'ona transmesa i l'ona incident és

$$\hat{R}'_+(\omega) = \frac{\hat{p}_{b-}}{\hat{p}_{a-}} = 1 + \frac{\hat{p}_{a+}}{\hat{p}_{a-}} = 1 + \hat{R}_+(\omega) \quad . \quad (5.10.5)$$

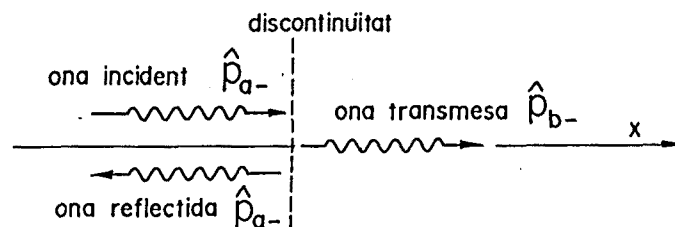


Fig. 5.10-2 Sentits de propagació de l'ona reflectida i l'ona transmesa en una discontinuïtat.

La forma temporal de la funció s'obté en aplicar la TF^{-1} :

$$R'_+(t) = TF^{-1} [\hat{R}'_+(\omega)] = \delta(t) + R_+(t) \quad . \quad (5.10.6)$$

Si l'ona incident es propaga en sentit oposat, la funció que descriu la corresponent ona transmesa $-R'_-(t)$ té una expressió anàloga a la 5.10.6.

Per últim es defineixen les funcions que descriuen l'esmoreïment sofert per les ones incidents en propagar-se al llarg dels dos trams que delimiten amb la secció on es situa cada discontinuïtat -funcions $\sigma_-(t)$ i $\sigma_+(t)$ -.

En els casos de l'extrem d'entrada i de l'extrem de sortida de l'instrument només es defineixen les funcions de reflexió i d'esmoreïment per a les ones incidents que es propaguen en l'únic sentit possible; negatiu si es tracta de l'extrem d'entrada i positiu si es tracta de l'extrem de sortida.

El programa continua amb el càlcul de la resposta impulsional propiament dit. Aquest consisteix en realitzar numèricament, a mesura que les dues ones resultants avancen en cada sentit, les integrals de convolució necessàries per establir a cada discontinuïtat quina és l'ona reflectida i quina és l'ona transmesa. La Figura 5.10-3 il·lustra el procés de convolució associat a una discontinuïtat.

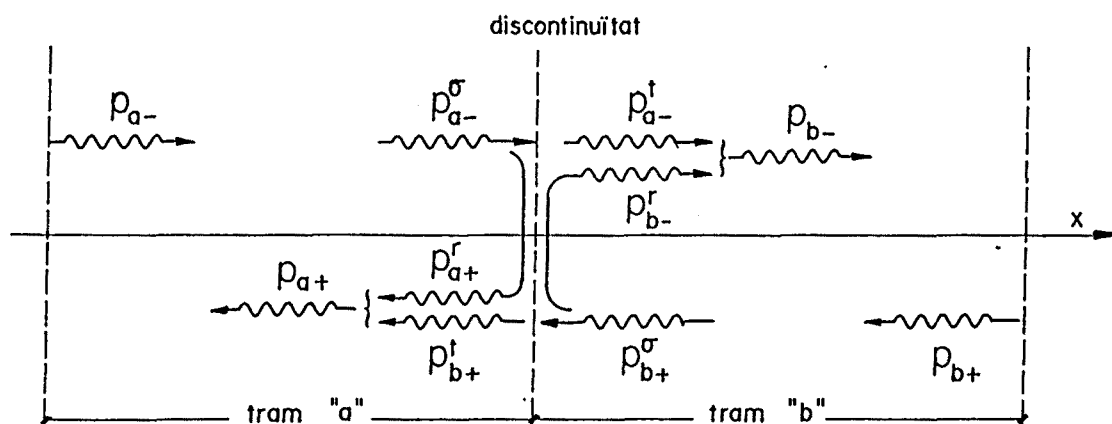


Fig. 5.10-3 Generació d'ones reflectides i d'ones transmeses en una discontinuïtat.

Les dues ones incidents, p_{a-} i p_{b+} , arriben a la discontinuïtat afectades prèviament per l'esmoreïment que actua al llarg dels trams "a" i "b"

$$\begin{aligned} p_{a-}^{\sigma} &= \sigma_{-} * p_{a-} \\ p_{b+}^{\sigma} &= \sigma_{+} * p_{b+} \end{aligned} \quad (5.10.7)$$

I a partir d'elles es generen les ones reflectides i transmeses a la discontinuïtat d'acord amb

$$\begin{aligned} p_{a+}^r &= R_{+} * p_{a-}^{\sigma} \\ p_{b-}^r &= R_{-} * p_{b+}^{\sigma} \\ p_{a-}^t &= R'_{+} * p_{a-}^{\sigma} = p_{a+}^r + p_{a-}^{\sigma} \\ p_{b+}^t &= R'_{-} * p_{b+}^{\sigma} = p_{b-}^r + p_{b+}^{\sigma} \end{aligned} \quad (5.10.8)$$

Finalment les ones resultants, modificades en atravesar la discontinuïtat, s'obtenen en superposar les ones reflectida i transmesa a cada cantó

$$\begin{aligned} p_{b-} &= p_{a-}^t + p_{b-}^r \\ p_{a+} &= p_{b+}^t + p_{a+}^r \end{aligned} \quad (5.10.9)$$

L'algorisme desenvolupat per determinar la resposta impulsional, el qual s'ha anomenat *algorisme de multiconvolució*, realitza a cada iteració un pas en el càlcul de totes les integrals de convolució associades a cada discontinuïtat. Les etapes de l'algorisme, del qual la figura 5.10-4 mostra el diagrama de blocs, són les següents:

. Primer s'inicialitzen a zero els registres que emmagatzemen les dues ones resultants i es determina el valor inicial de la pressió a la secció d'entrada per mitjà de la convolució entre l'impuls inicial de velocitat i l'expressió 5.10.3. Aquest valor s'introdueix a la primera posició del registre de l'ona que es propaga vers l'extrem de sortida -ona p_{-} .

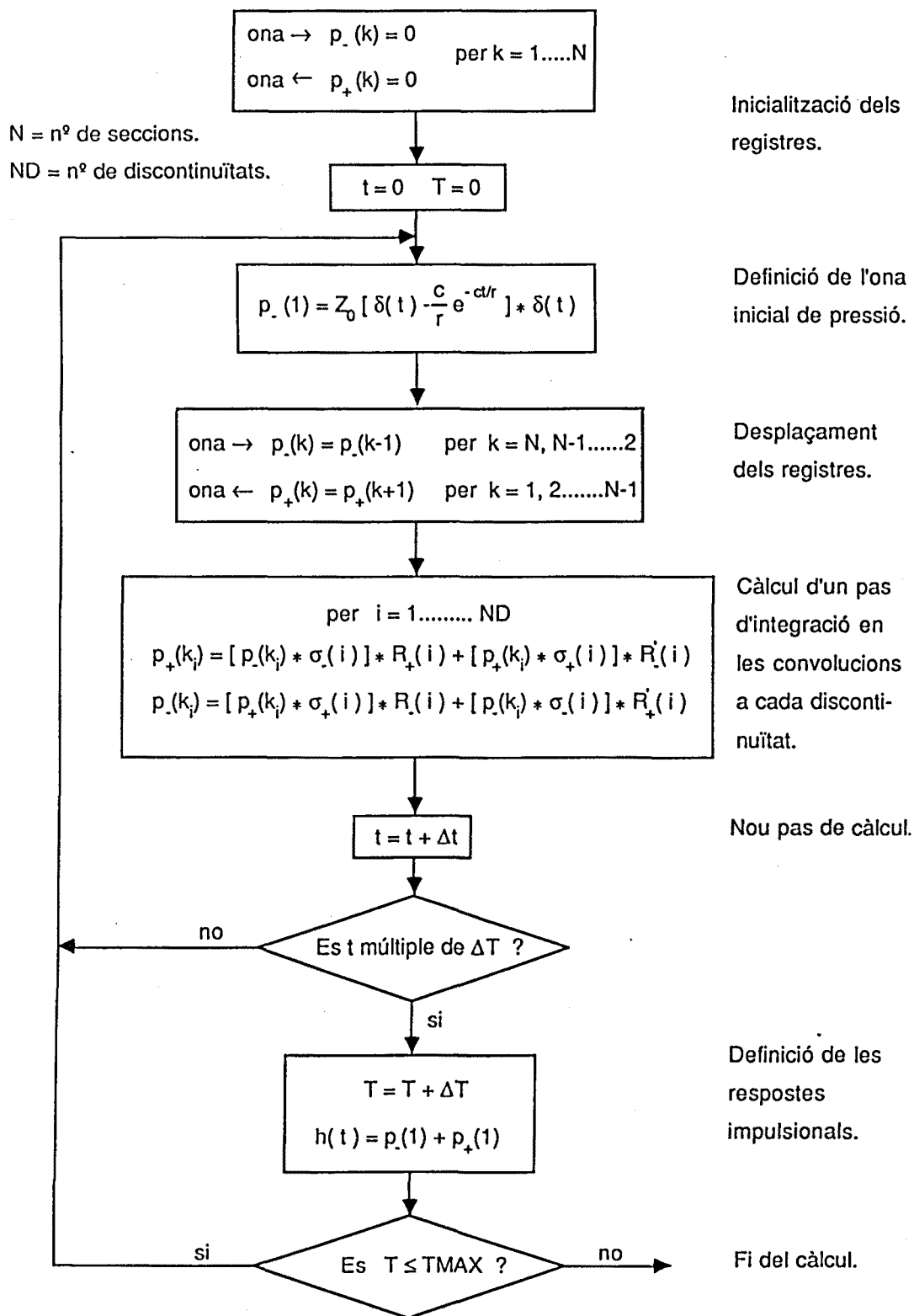


Fig. 5.10-4 Diagrama de blocs de l'algorisme de multiconvolució.

. A continuació els registres es desplacen una posició, acció que simula l'avenç d'ambdues ones en els seus respectius sentits de propagació un increment d'espai ΔL igual a la distància existent entre les seccions definides en la discretització. El temps que tarden les ones en recorre aquest increment d'espai, $\Delta t = \Delta L / c$, defineix la màxima resolució temporal que es pot obtenir en el càlcul de la resposta impulsional.

. El pas següent és la modificació de les pressions d'ambdues ones a les discontinuïtats. Aquesta modificació ve donada pel resultat que s'obté en realitzar un pas d'integració en el càlcul de les integrals de convolució associades a cada discontinuïtat -expressions de la 5.10.7 a la 5.10.9-. A cada pas d'integració es determina també el valor de l'ona inicial de pressió i s'introdueix a la primera posició del registre de l'ona p_1 que correspon a la secció d'entrada.

. Finalment el procés es repeteix desplaçant de nou els registres i realitzant un nou pas en el càlcul de totes les integrals de convolució. D'aquesta manera ambdós registren descriuen en tot instant quina és la distribució de pressions a l'interior de l'instrument.

Cada "n" passos de càlcul s'emmagatzema el valor de la pressió a la secció d'entrada, la qual estableix quina és la resposta impulsional. La resolució temporal de la resposta és per tant

$$\Delta T = n \Delta t = n \frac{\Delta L}{c} \quad . \quad (5.10.10)$$

També s'emmagatzema periòdicament la distribució de pressions a l'interior de l'instrument. Aquesta informació permet representar l'evolució temporal de la pressió en forma de gràfic tridimensional espai / temps / pressió.

L'agorisme de càlcul finalitza quan s'ha determinat la resposta impulsional fins al temps màxim desitjat.

Per tal d'evitar les inestabilitats numèriques que es poden presentar en el càlcul de les integrals de convolució quan en aquestes participen funcions de

reflexió amb exponencials creixents, s'han emprat formulacions recurrents que permeten determinar els valors de pressió de les ones reflectides i transmeses en funció dels valors corresponents a l'instant anterior i de la pressió de l'ona incident. Aquestes formulacions permeten a més reduir apreciablement el temps de càlcul en front del temps que requereixen els mètodes usuals d'integració numèrica. A l'apèndix-II s'exposen amb detall les formulacions recurrents emprades.

5.11. RESULTATS IL·LUSTRATIUS.

En aquest apartat s'exposen una sèrie d'exemples d'aplicació de l'algorisme de multiconvolució en el càlcul de la resposta impulsional. Els exemples corresponen a diferents configuracions del perfil interior de tubs formats per trams cilíndrics i cònics, en els quals apareixen discontinuïtats dels tipus més correntment trobats en els instruments musicals de vent. En totes les configuracions presentades l'extrem de la dreta és un extrem obert i l'extrem de l'esquerra és un extrem tancat ja que en ell es defineix la resposta. També es presenten les respostes impulsional del tible i la tenora determinades mitjançant la multiconvolució, per al cas de la nota més greu de cada instrument.

Tots els resultats es comparen amb els resultats obtinguts en determinar la impedància acústica a la secció d'entrada i en aplicar la FFT^{-1} per obtenir la resposta impulsional. El model matemàtic per a determinar la impedància acústica ha estat desenvolupat per S. Cardona (Cardona 1980), i el programa per al càlcul de la impedància i de la resposta impulsional mitjançant la FFT^{-1} ha estat desenvolupat per A. Barjau (Barjau 1987).

En els càlculs s'han emprat les següents constants:

$\rho_0=1,21 \text{ kgm}^{-3}$ i $c=340 \text{ ms}^{-1}$, valors corresponents a unes condicions ambientals de 10^5 Pa de pressió i 15°C de temperatura.

$\zeta_0=0,135$, constant d'esmoreïment estimada experimentalment per S. Cardona (Cardona 1980).

Les respostes obtingudes per mitjà de la multiconvolució han estat determinades emprant una discretització espacial de 10 mm, excepte en

aquells casos en que aquesta ha estat insuficient per a localitzar correctament les discontinuïtats. Així en els casos del tible i la tenora s'ha emprat una discretització de 1 mm. La resolució temporal s'obté en funció de la resolució espacial d'acord amb $\Delta t = \Delta L / c$, la qual per al cas de $\Delta L = 10$ mm és $\Delta t = 29,4$ μ s.

A efectes de comparació de resultats, les impedàncies acústiques s'han determinat fins a una freqüència de 17 kHz amb la qual cosa, a l'hora d'aplicar la FFT⁻¹, s'obté la mateixa resolució temporal que amb la multiconvolució.

L'impuls inicial de velocitat es modelitza mitjançant una ona quadrada d'alçada $1/\Delta t$ i amplada Δt . Amb aixó l'ona inicial de pressió presenta un valor màxim de $1,4 \times 10^7$ Nm⁻³, el qual apareix retallat a les figures per tal de mostrar amb més detall les reflexions.

A totes les figures la resposta impulsional "a" correspon a la resposta obtinguda mitjançant la multiconvolució i la resposta impulsional "b" correspon a l'obtinguda a partir del càlcul de la impedància acústica i de l'aplicació de la FFT⁻¹.

Les figures 5.11-1 i 5.11-2 mostren la $h(t)$ per a dos tubs cilíndrics de 20 i 100 mm de diàmetre respectivament. La semblança entre els resultats obtinguts emprant ambdós procediments és notable. En el cas del tub de diàmetre més gran s'observen lleugeres diferències en les reflexions degudes a l'aproximació emprada en definir la funció de reflexió a l'extrem obert, diferències que s'accentuen a mesura que el diàmetre augmenta.

Aquest fet també s'observa a les figures 5.11-3 i 5.11-4 les quals corresponen a les respostes $h(t)$ de dos tubs cònics truncats de 50 i 100 mm de diàmetre a l'extrem obert respectivament. En aquest cas la forma de les reflexions és diferent ja que en ser el tub cònic, l'ona incident presenta l'estela en forma d'exponencial negativa decreixent característica de les ones esfèriques generades per un impuls de cabal.

Les figures 5.11-5 i 5.11-6 mostren la $h(t)$ per a tubs cilíndrics que presenten un canvi de diàmetre. En el primer cas el diàmetre augmenta i com a conseqüència apareix un impuls reflectit negatiu. En el segon cas el diàmetre disminueix, fet que produeix un impuls reflectit positiu.

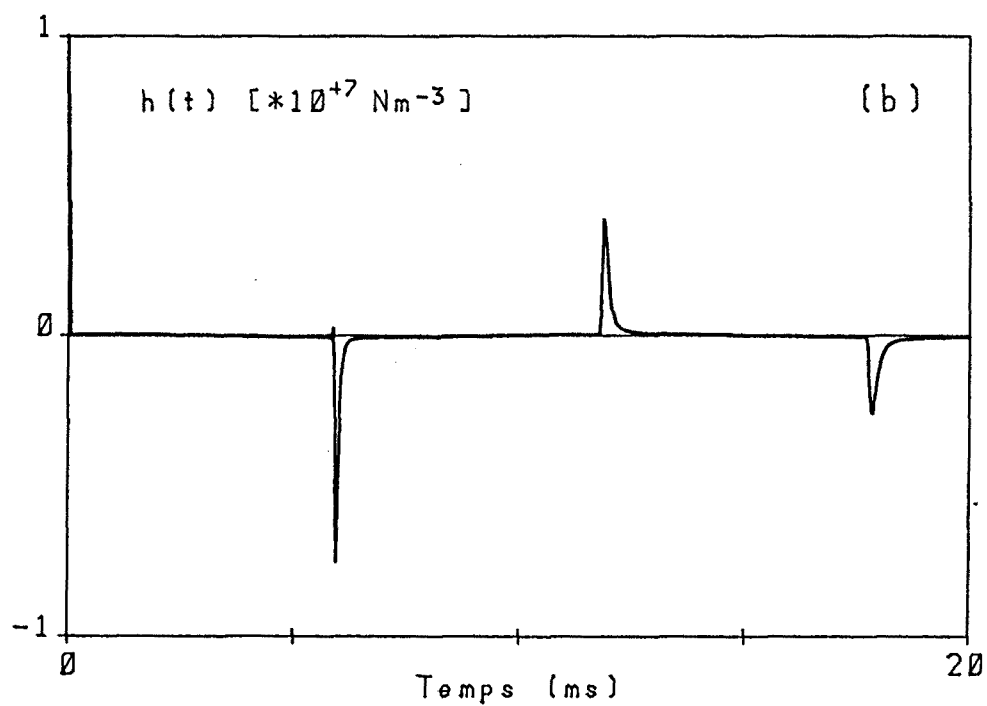
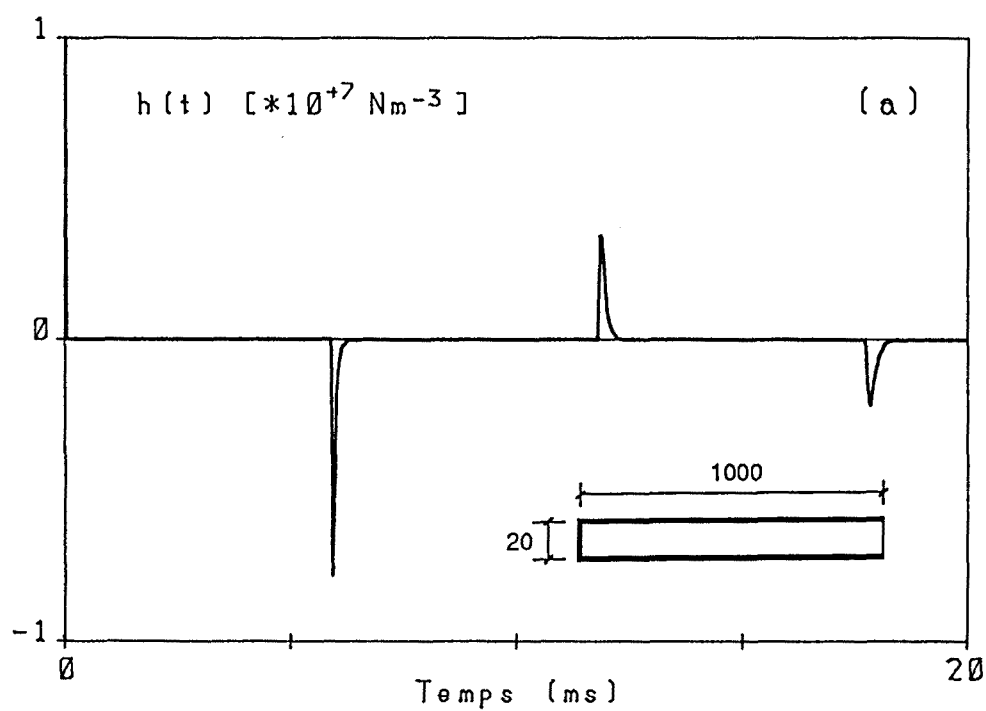


Fig. 5.11-1 Resposta impulsional d'un tub cilíndric de 20 mm de diàmetre.

(a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.

(b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

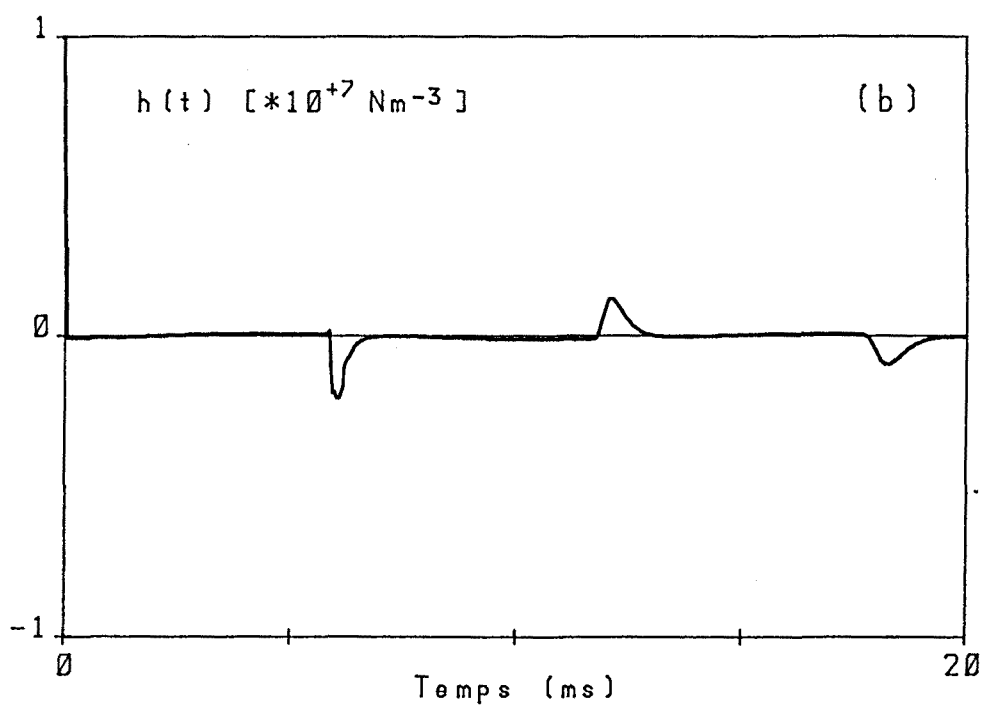
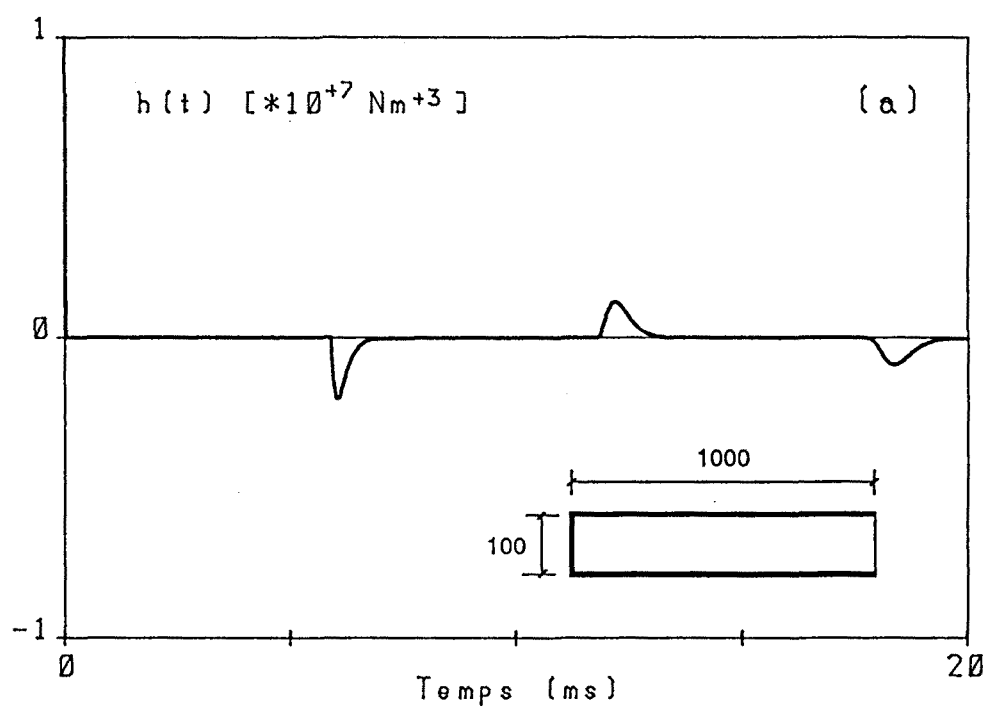


Fig. 5.11-2 Resposta impulsional d'un tub cilíndric de 100 mm de diàmetre.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

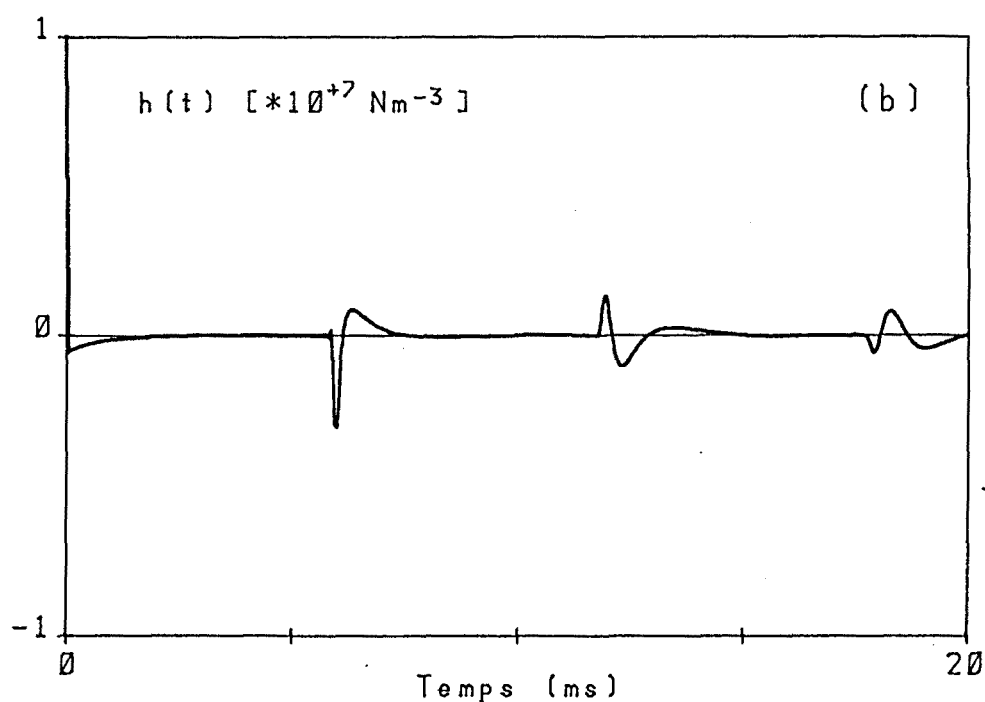
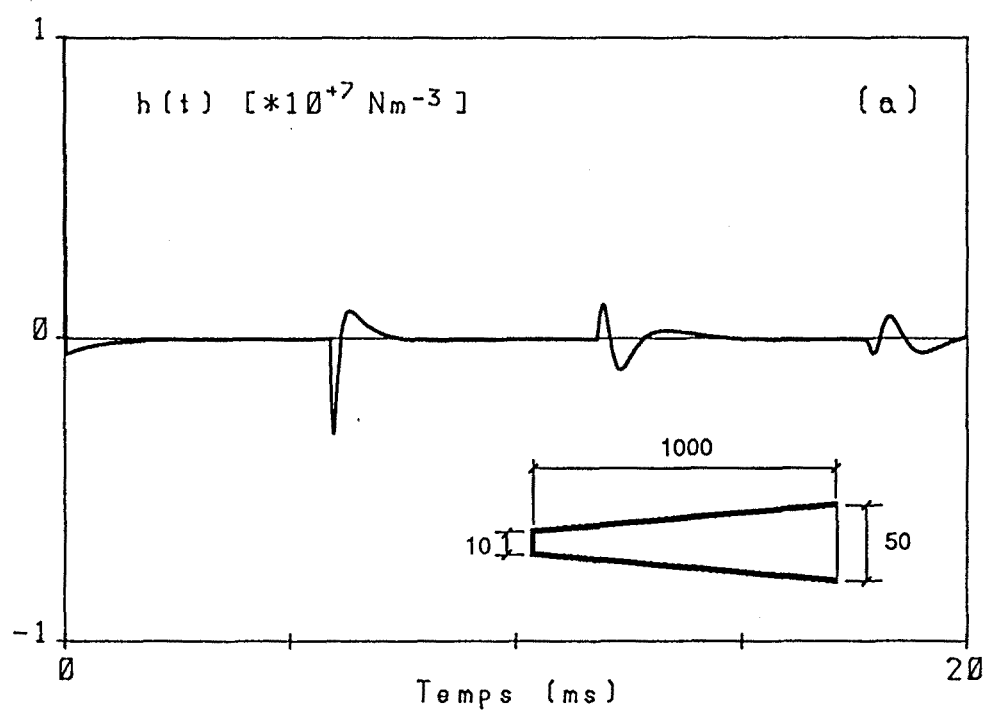


Fig. 5.11-3 Resposta impulsional d'un tub cònic truncat.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

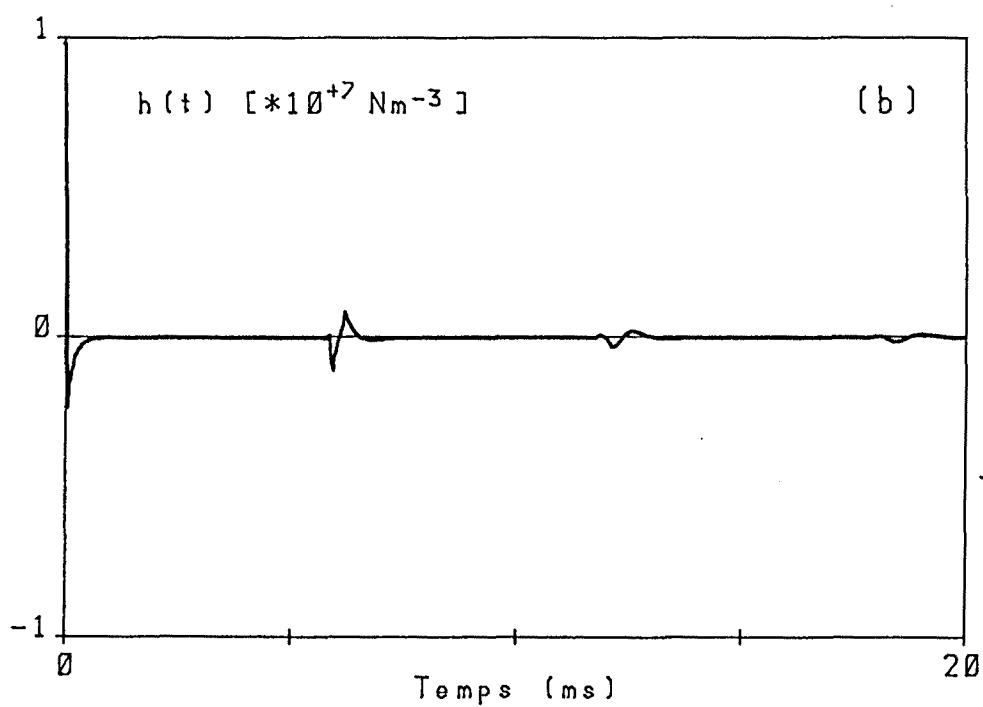
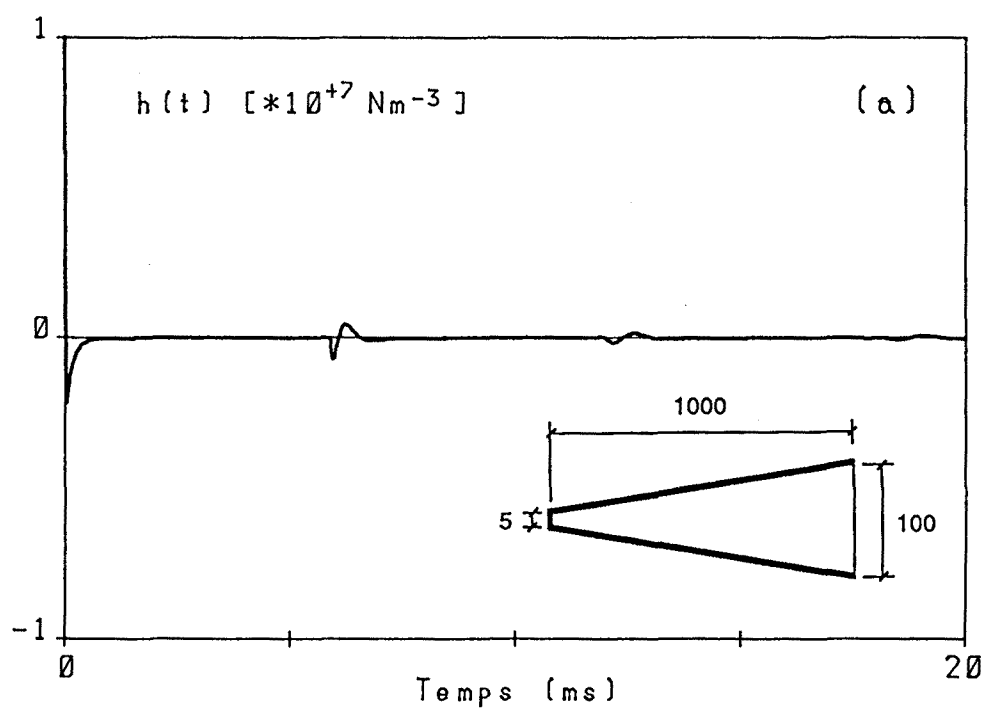


Fig. 5.11-4 Resposta impulsional d'un tub cònic truncat.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

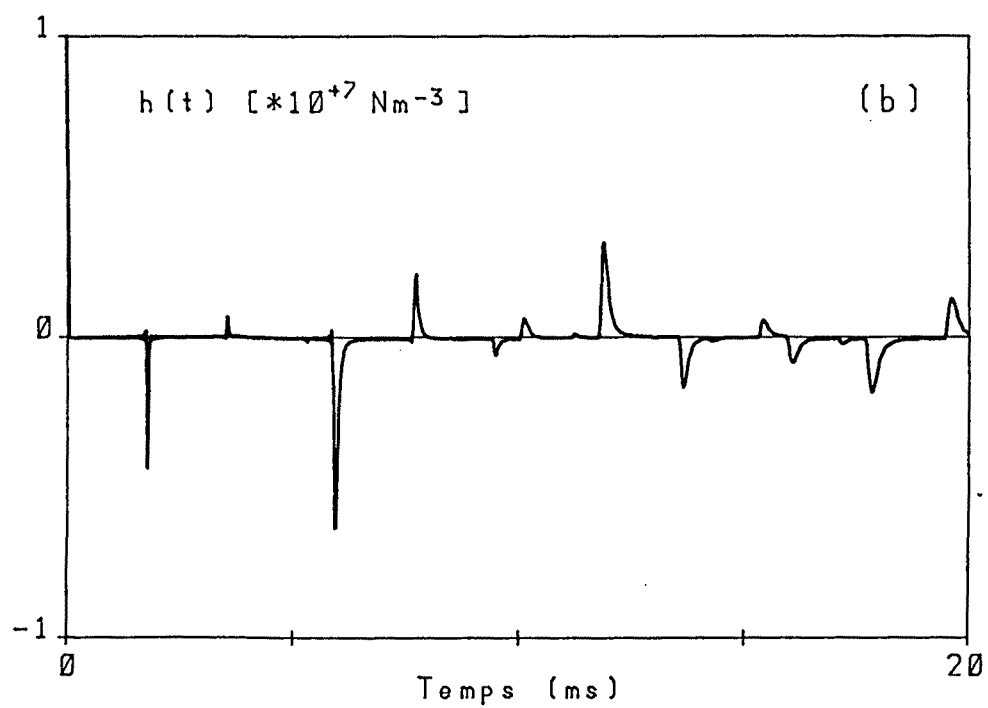
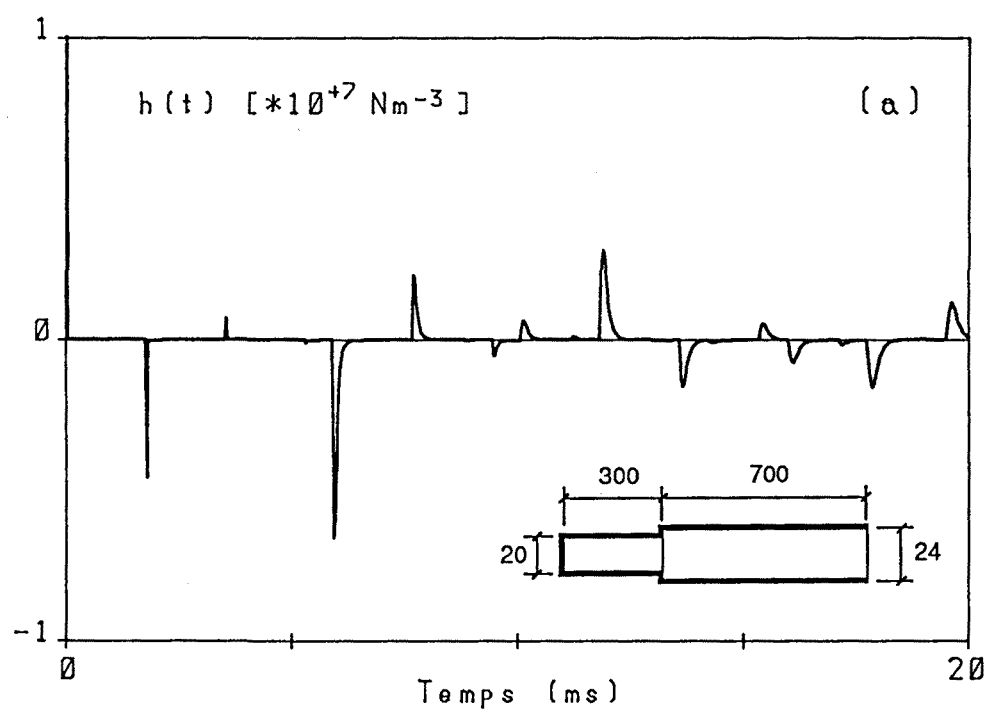


Fig. 5.11-5 Resposta impulsional d'un tub cilíndric amb un augment de diàmetre.

(a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.

(b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

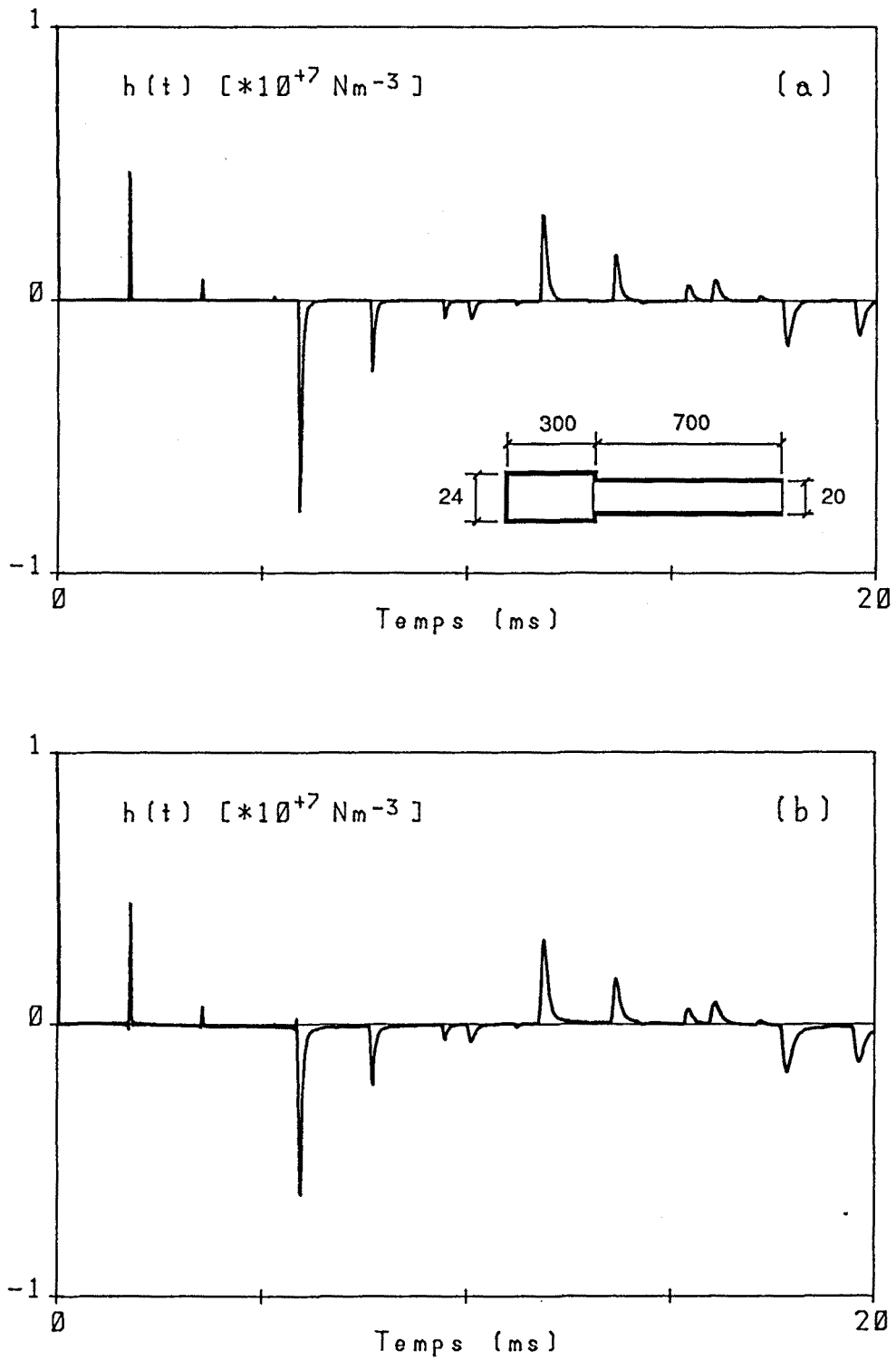


Fig. 5.11-6 Resposta impulsional d'un tub cilíndric amb una disminució de diàmetre.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

Les figures 5.11-7 i 5.11-8 corresponen a les $h(t)$ per a tubs que presenten canvis de conicitat amb constant $v < 0$. El primer tub està format per un tram cilíndric i un tram cònic que s'obre vers l'extrem obert. En la seva $h(t)$ s'observa una primera reflexió produïda en el canvi de conicitat de tipus exponencial decreixent, seguida d'una altra reflexió produïda al mateix indret, i finalment de la reflexió a l'extrem obert. De nou la diferència entre els resultats obtinguts per mitjà d'ambdós procediments és negligible. El segon tub està format per dos trams cònics. En la resposta s'observa també la primera reflexió corresponen al canvi de conicitat, que en aquest cas presenta una forma diferent degut a la convolució amb l'estela negativa que segueix l'impuls inicial de pressió.

Les figures 5.11-9 i 5.11-10 corresponen a la $h(t)$ per a tubs amb un canvi de conicitat amb constant $v > 0$. El primer tub està format per dos trams cilíndrics units per un tram cònic tal com s'observa a la figura. En la resposta apareix una primera reflexió, de tipus exponencial positiva creixent, generada al primer canvi de conicitat -amb $v > 0$ - seguida de la reflexió produïda al segon canvi de conicitat -amb $v < 0$ - i finalment de la reflexió a l'extrem obert. Es comprova com el creixement exponencial de la primera reflexió es veu compensat per la superposició de les reflexions posteriors, de manera que la magnitud de la resposta impulsional roman sempre acotat.

El segon tub està format per un tram cònic que s'obre vers l'extrem obert seguit d'un tram cilíndric. La reflexió produïda en el canvi de conicitat, positiva, és de poca magnitud i no mostra el creixement exponencial propi d'aquest tipus de reflexions ja que la convolució de la funció de reflexió amb l'impuls de pressió que arriba al canvi de conicitat es veu compensada per la convolució de la funció de reflexió amb l'estela que acompanya l'impuls. En aquest cas la influència del canvi de conicitat en la resposta impulsional és petita tal com es comprova en comparar la resposta de la configuració considerada amb la d'un tub cònic truncat -figura 5.11-3-. La unió del tudell amb el cos superior, tant en el cas del tible com en el de la tenora, presenta una discontinuïtat d'aquest tipus. El seu efecte en el funcionament del instrument s'analitza al capítol 6.

Les figures de la 5.11-11 a la 5.11-13 mostren la resposta $h(t)$ per a tres tubs cilíndrics amb un forat transversal obert. Els tres tubs tenen el mateix diàmetre -20 mm- i el forat localitzat a la mateixa secció, però les dimensions

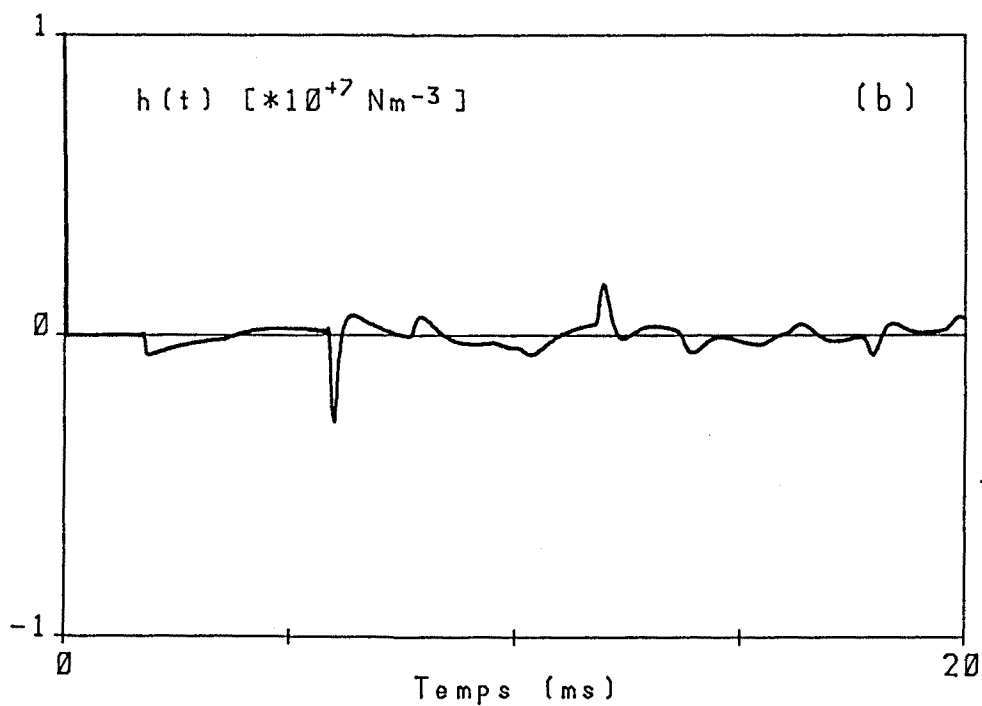
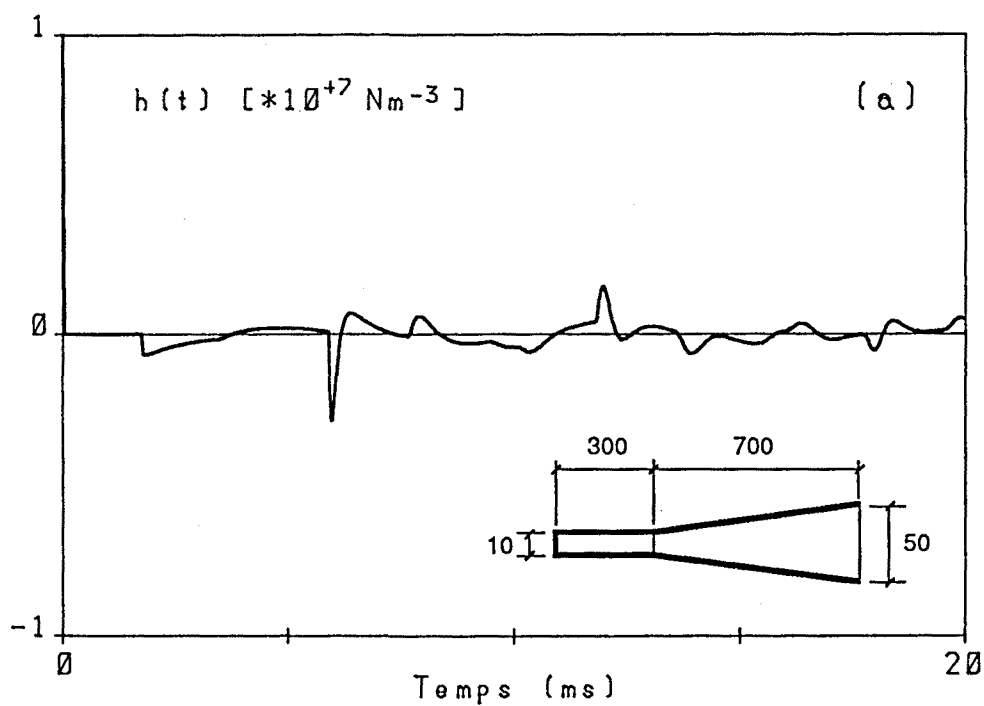


Fig. 5.11-7 Resposta impulsional d'un tub amb un canvi de conicitat de constant $v < 0$. Cas cilíndric-cònic.

(a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.

(b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

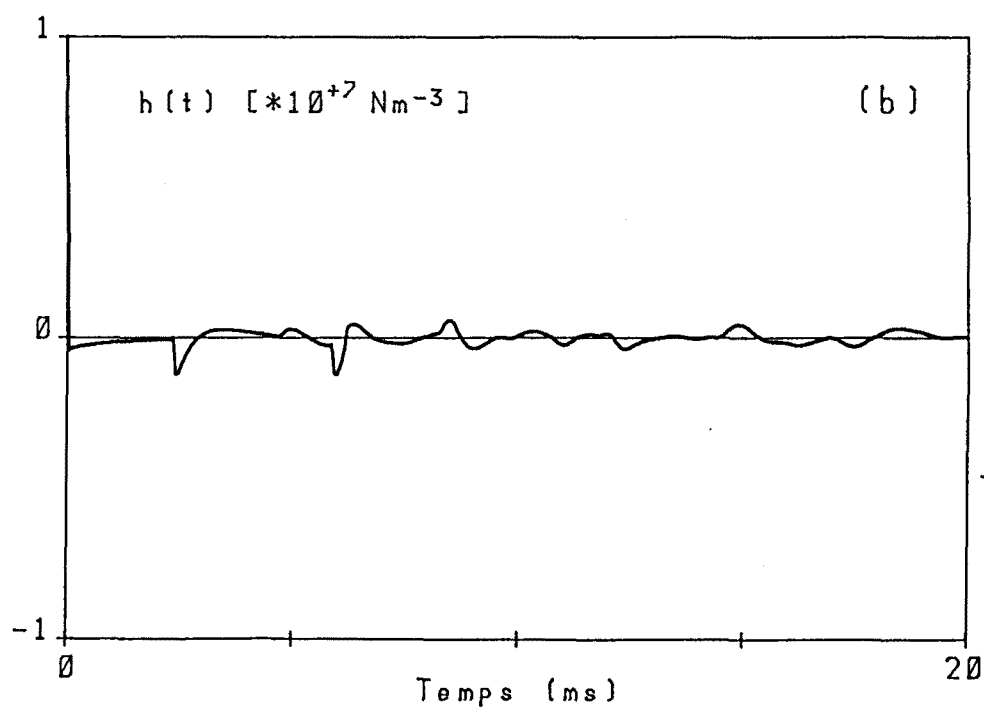
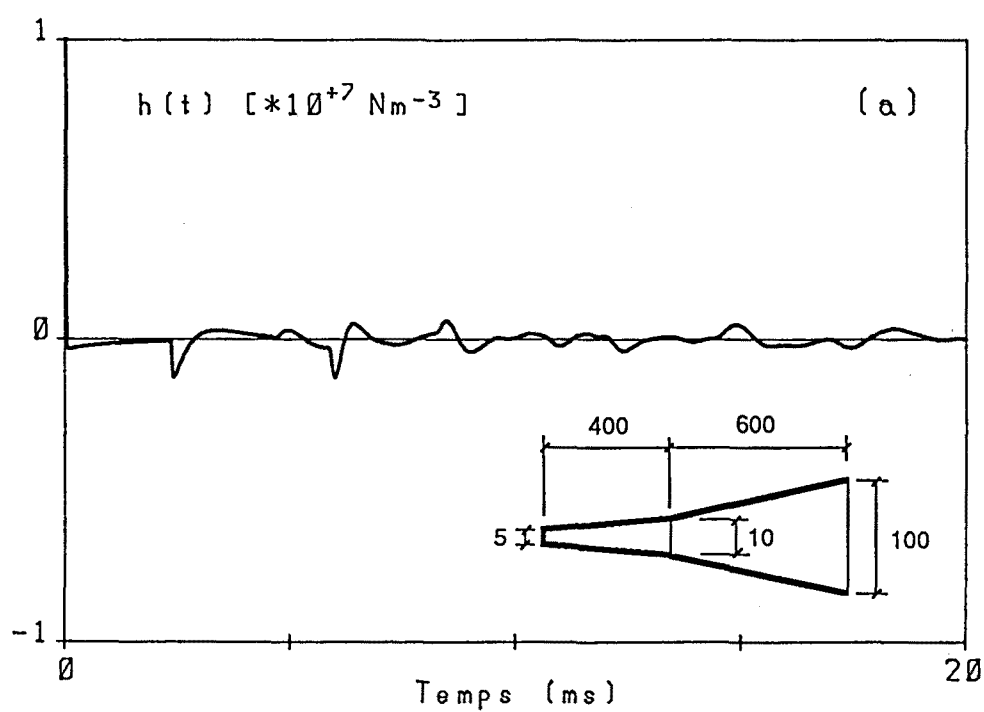


Fig. 5.11-8 Resposta impulsional d'un tub amb un canvi de conicitat de constant $v < 0$. Cas cònic -cònic.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

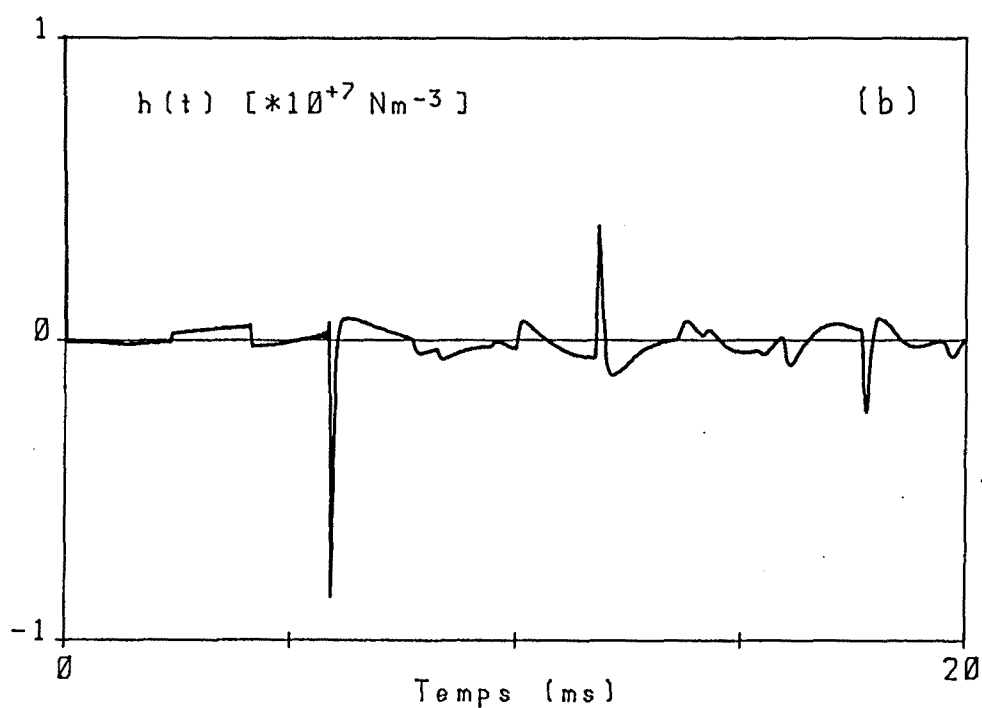
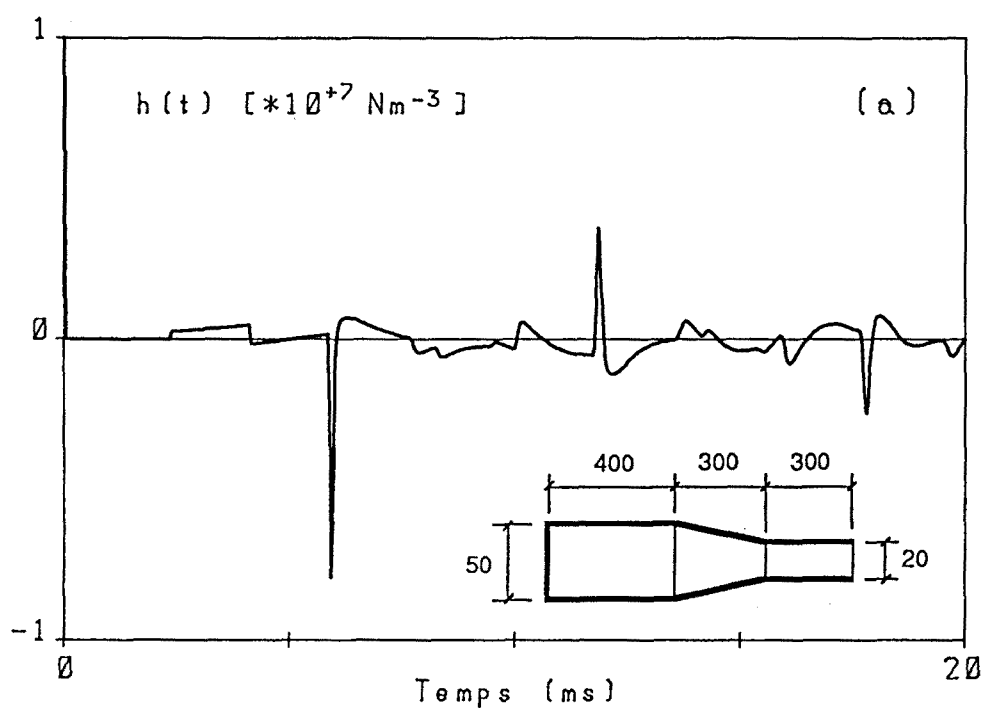


Fig. 5.11-9 Resposta impulsional d'un tub amb un doble canvi de conicitat. Cilíndric-cònic-cilíndric.

(a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.

(b) Obtinguda com a FFT⁻¹ de la impedància acústica.

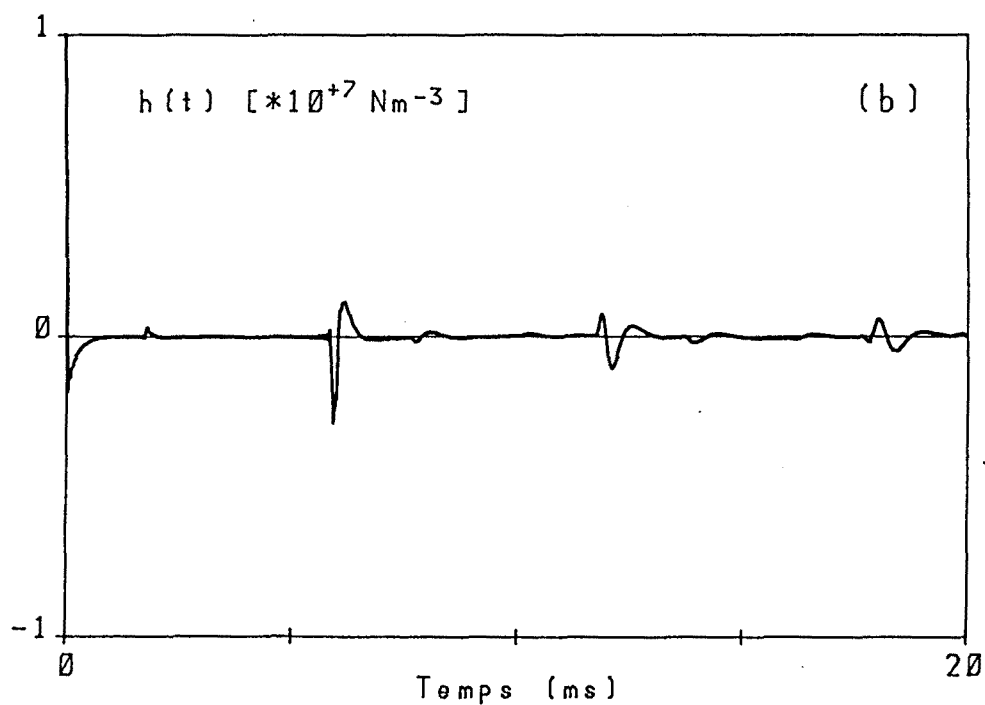
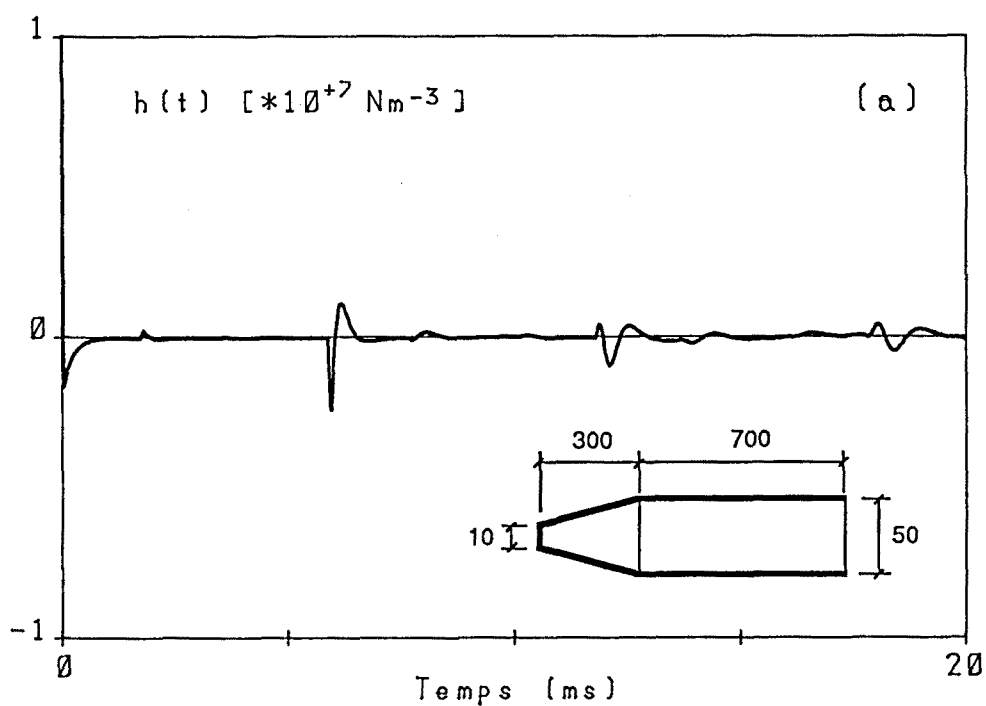


Fig. 5.11-10 Resposta impulsional d'un tub amb un canvi de conicitat de constant $v > 0$. Cas cònic-cilíndric.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

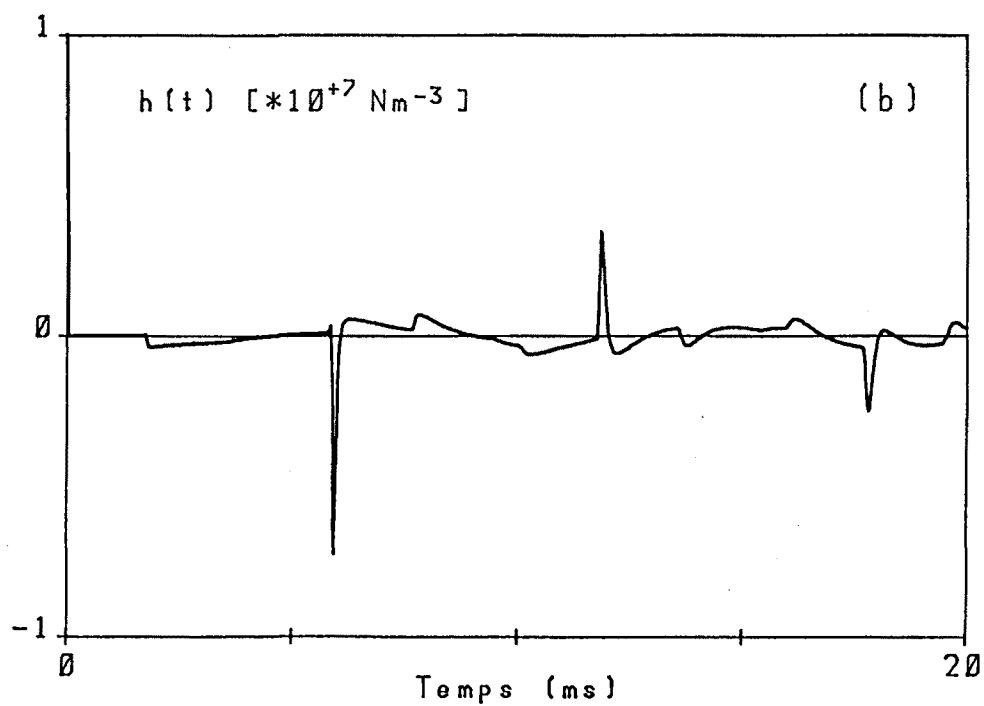
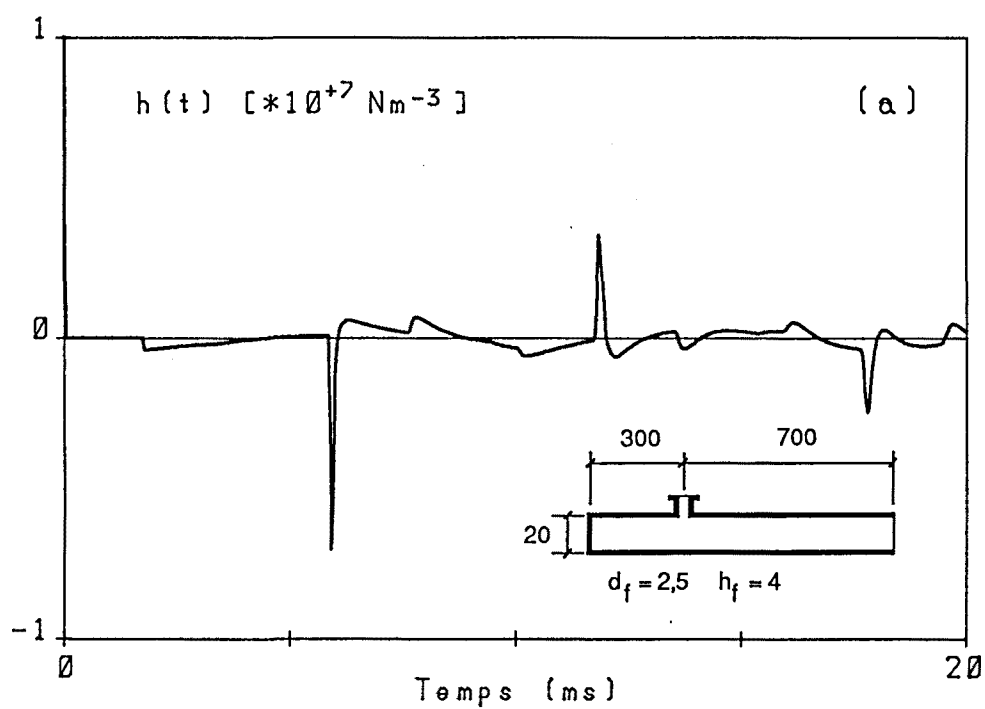


Fig. 5.11-11 Resposta impulsional d'un tub cilíndric amb un forat obert.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

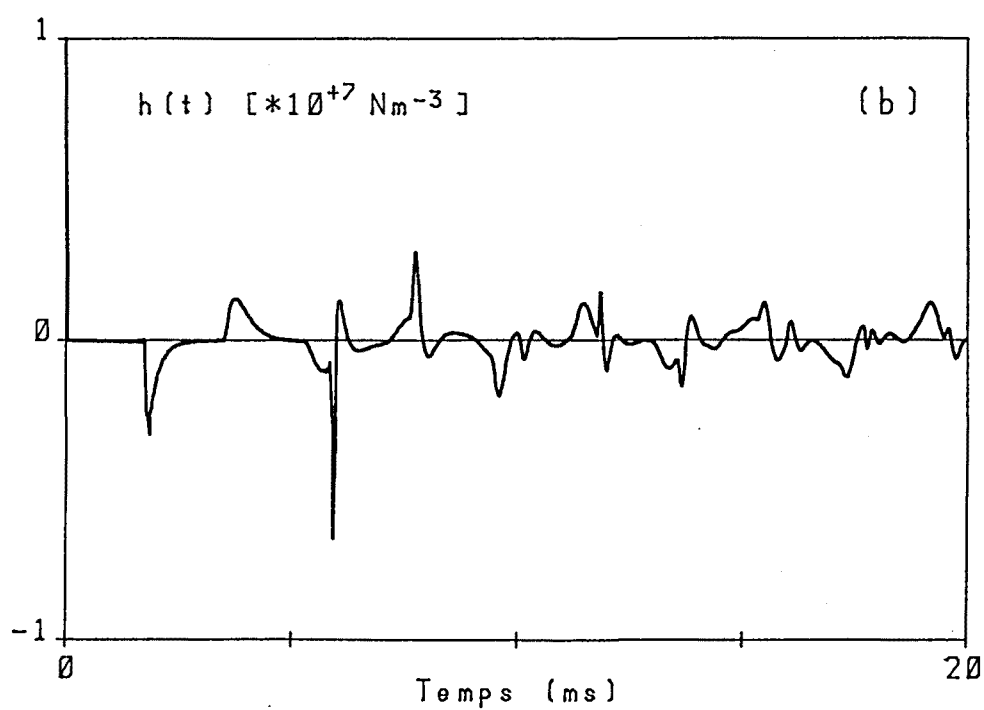
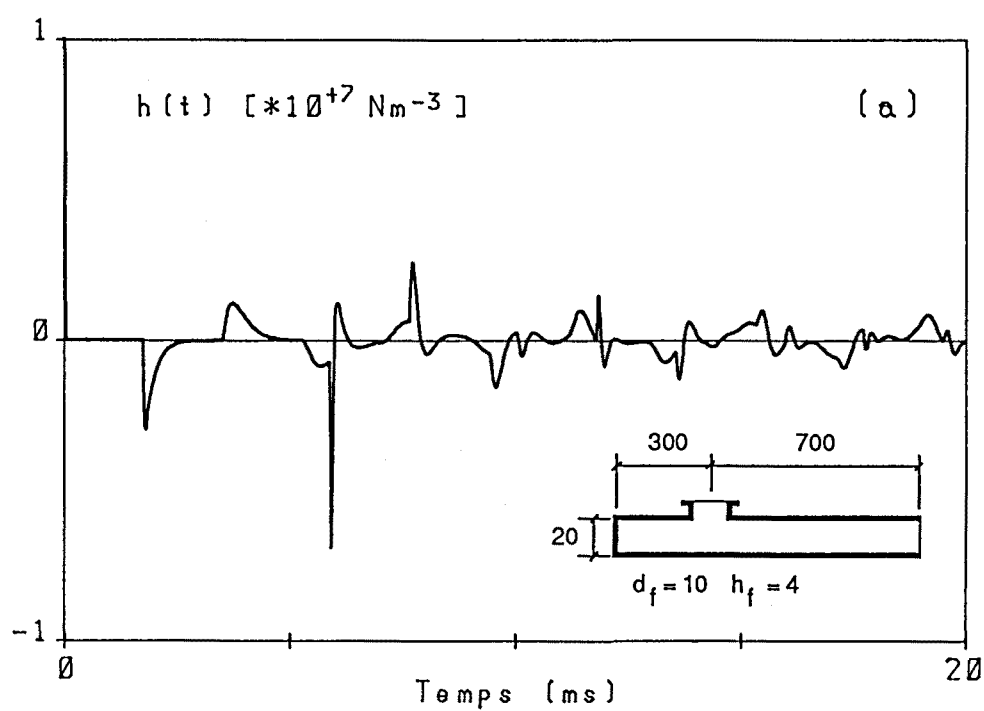


Fig. 5.11-12 Resposta impulsional d'un tub cilíndric amb un forat obert.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

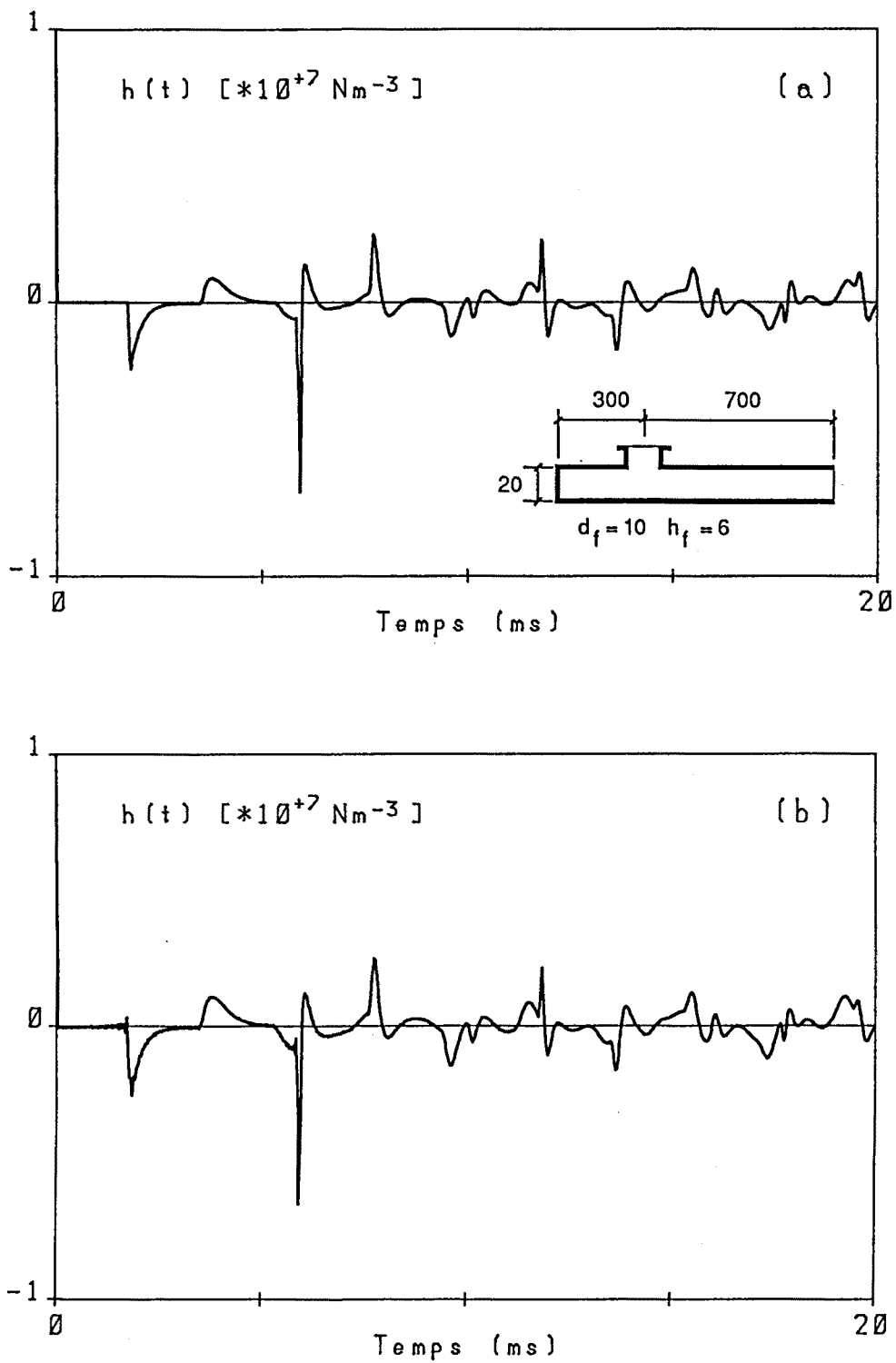


Fig. 5.11-13 Resposta impulsional d'un tub cilíndric amb un forat obert.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

d'aquest són diferents a cada tub. En tots tres casos s'observa una bona semblança entre els resultats obtinguts per mitjà d'ambdós mètodes de càlcul. Aixó demostra la validesa de la formulació emprada per a definir la funció de reflexió deguda a un forat obert.

El primer tub presenta un forat de 2,5 mm de diàmetre i 4 mm d'alçada. A la seva resposta s'observa que la primera reflexió provocada pel forat és poc intensa, encara de llarga durada. Els forats de dimensions reduïdes tenen per tant poca incidència en la resposta impulsional. El segon tub presenta un forat de 10 mm de diàmetre i 4 mm d'alçada. En aquest cas la reflexió és més intensa i estreta que l'anterior, assemblant-se a la que produeix un extrem obert. Finalment el darrer tub presenta un forat també de 10 mm de diàmetre però de 6 mm d'alçada. La reflexió és anàloga a l'anterior però de menor intensitat, fet que es deu a l'alçada més gran del forat.

La forma de la reflexió que produeix un forat obert té molta importància pel que fa a l'espontaneïtat de l'instrument ja que de les reflexions produïdes als forats d'afinació en depèn el govern de la canya.

Les figures 5.11-14 i 5.11-15 corresponen a les $h(t)$ per als mateixos tubs cilíndrics amb forat presentats a les figures 5.11-11 i 5.11-12, però amb el forat tapat. Com que les reflexions produïdes en els forats tapats són molt estretes, i per tal de representar-les correctament, s'ha emprat en el càlcul de la resposta mitjançant la multiconvolució una resolució temporal més elevada $\Delta t = 11,8 \mu s$ i el càlcul de la impedància acústica s'ha estès fins a una freqüència màxima de 30 kHz.

El forat de dimensions més petites -figura 5.11-14- produeix unes reflexions pràcticament nul·les i la resposta impulsional és pràcticament idèntica a la del tub cilíndric sense cap forat. El forat de dimensions més grans -figura 5.11-15- produeix reflexions més intenses. En tots dos casos però les reflexions són molt estretes i definides per un impuls de pressió negatiu seguit d'una exponencial positiva gairebé impulsional. Aixó fa que les reflexions produïdes pels forats tapats en un instrument no afectin pràcticament el govern de la canya, i que per tant no intervinguin en l'establiment del mecanisme d'autoexcitació. Al capítol 6 s'analitza amb més detall aquest fet.

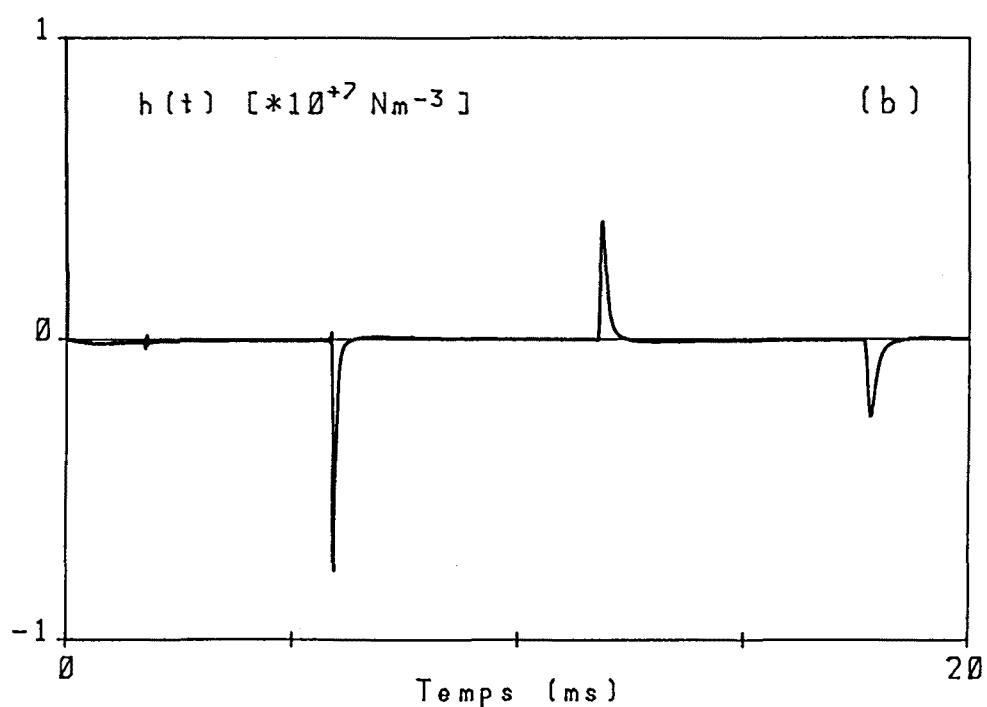
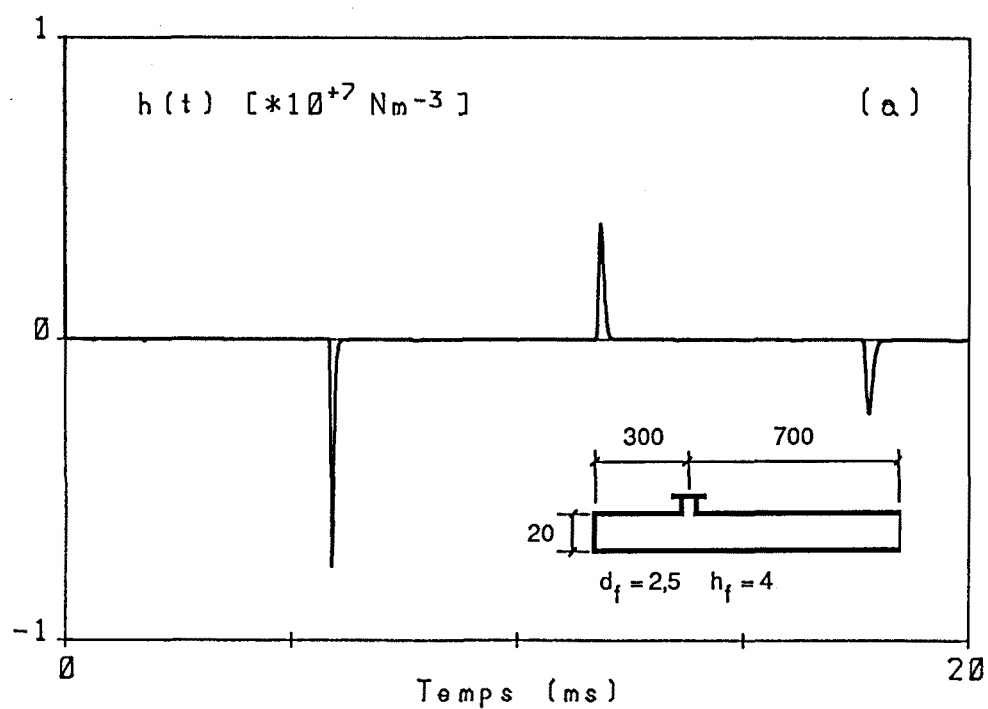


Fig. 5.11-14 Resposta impulsional d'un tub cilíndric amb un forat tapat.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

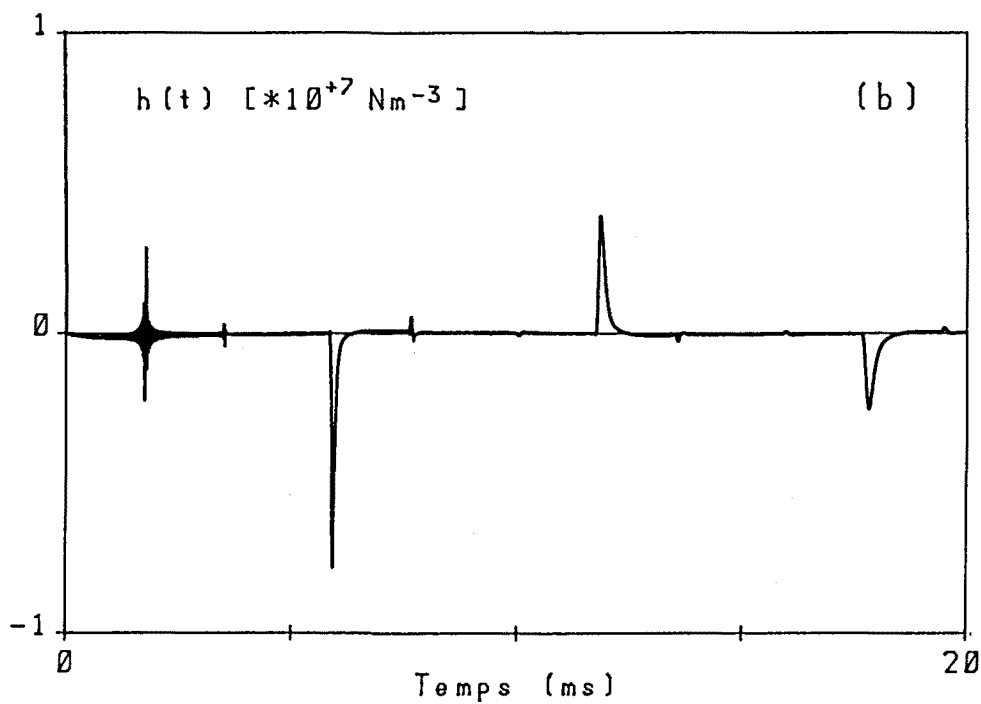
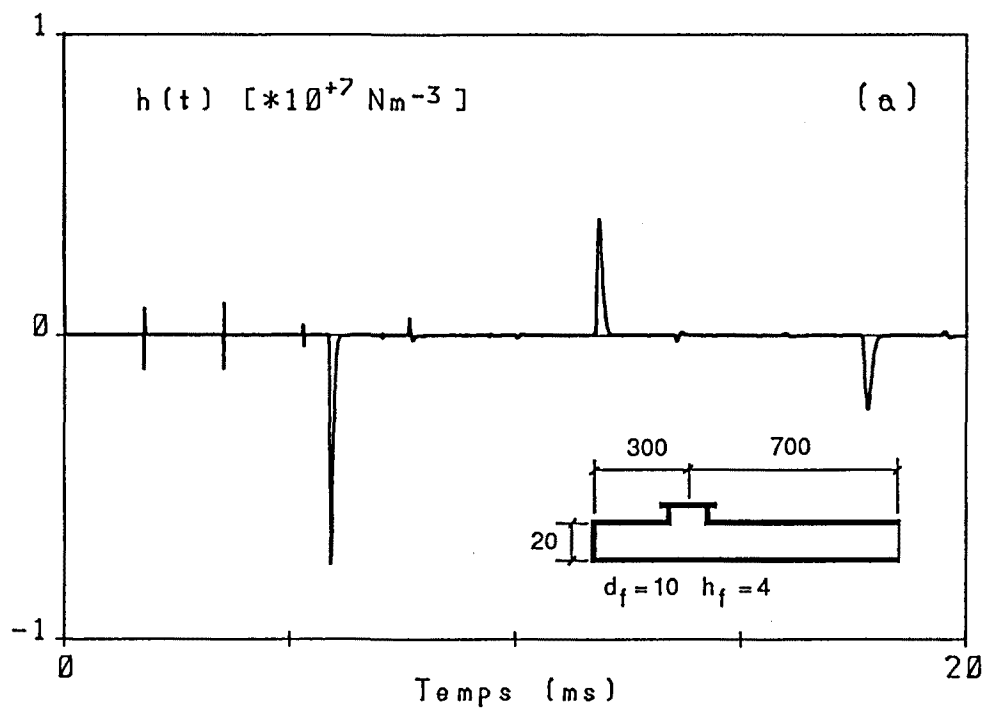
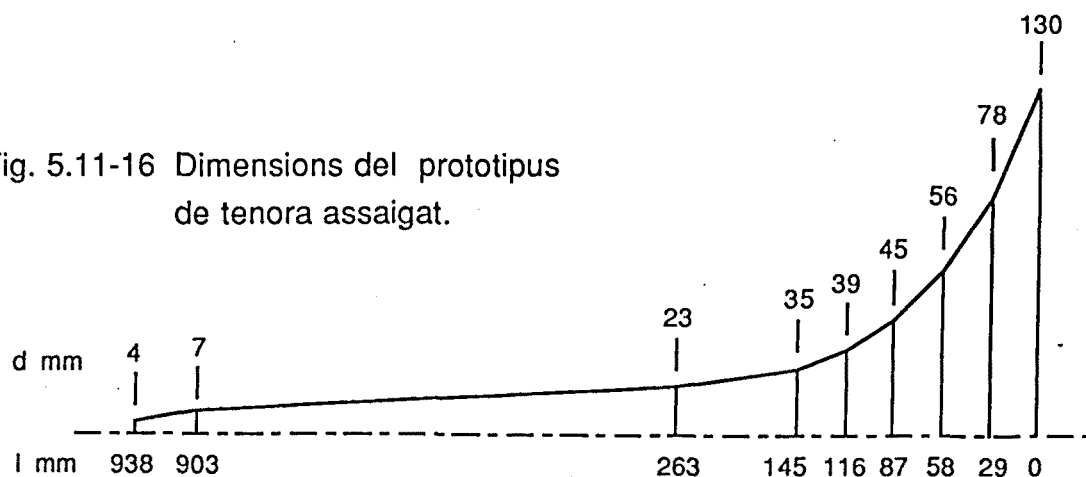


Fig. 5.11-15 Resposta impulsional d'un tub cilíndric amb un forat tapat.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

La discrepància en la magnitud de la primera reflexió del forat que s'observa en les respostes obtingudes mitjançant ambdós procediments prové del fet que, malgrat ser la resolució temporal elevada, és encara insuficient per representar correctament les reflexions, les quals apareixen retallades en ambdues respostes. El riçat que acompanya la primera reflexió de la figura 5.11-15 "b" es deu a que la impedància acústica del tub considerat presenta pics de ressonància importants per sobre de 30 kHz, els quals han estat exclosos de la FFT⁻¹. Aquests pics corresponen a ressonàncies d'alta freqüència de la columna d'aire compresa entre l'extrem tancat i la secció on es situa el forat.

La figura 5.11-17 correspon a la resposta impulsional determinada amb els dos procediments per a un prototipus de tenora la geometria del qual es mostra a la figura 5.11-16. Aquest està format per un pavelló de dimensions iguals a les de la tenora Pardo -capítol 1 taula 1.1-I -, un tub cònic sense forats, i un tudell. El prototipus, a part de la inexistència de forats, té la particularitat de no presentar discontinuïtats de diàmetre a les unions de les diferents parts. Per tal d'evitar-les ha estat necessari allargar el prototipus 76 mm respecte de l'instrument original.

Fig. 5.11-16 Dimensions del prototipus de tenora assaigat.



La figura 5.11-18 mostra la resposta impulsional obtinguda experimentalment. A efectes de comparació, les respostes calculades s'han determinat a partir d'un impuls de velocitat inicial modelitzat numèricament per mitjà d'una ona quadrada d'amplada meitat de la de l'impuls inicial que s'observa a la resposta experimental, el qual es considera definit per una

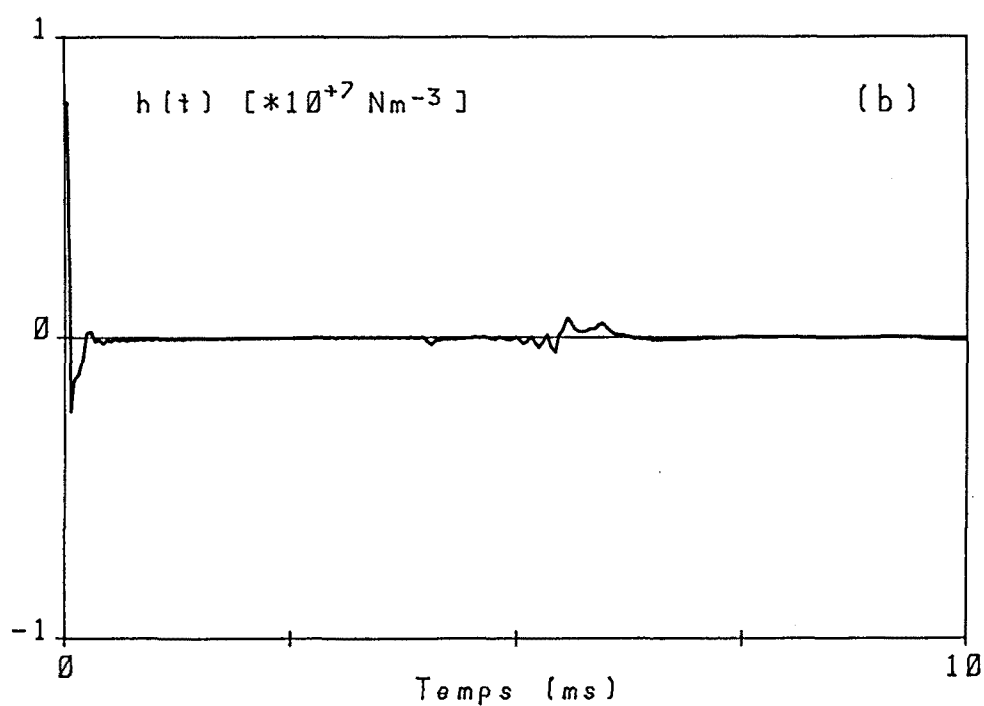
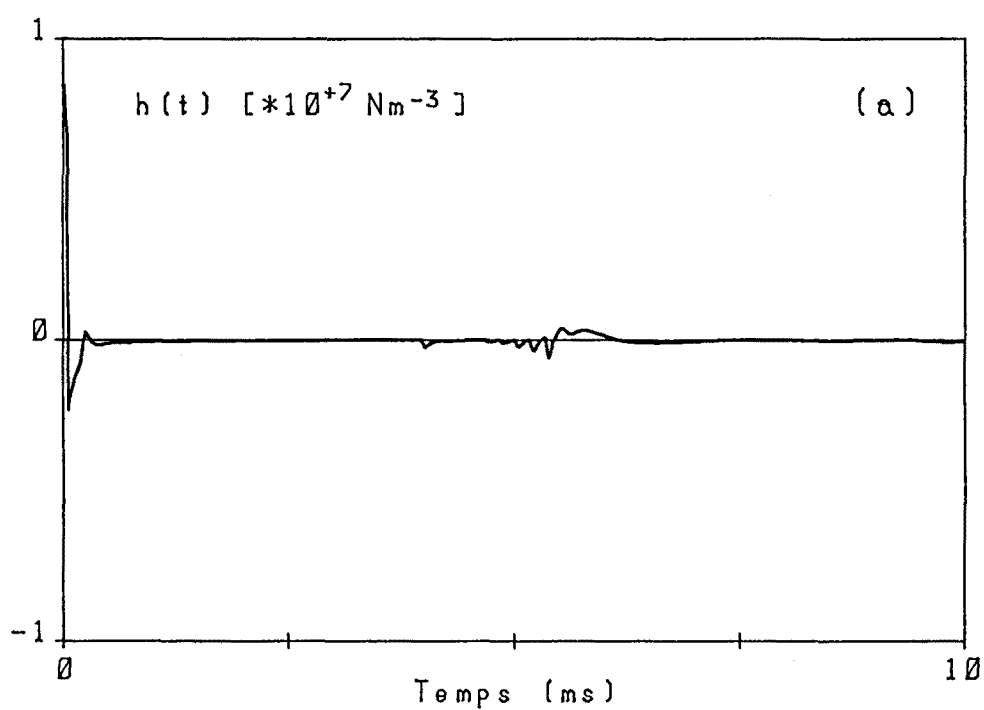


Fig. 5.11-17 Resposta impulsional del prototipus de tenora representat a la figura 5.11-16.

(a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.

(b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

funció Hanning. D'aquesta manera l'alçada del impulsos inicials en les respostes calculades i en l'experimental coincideixen.

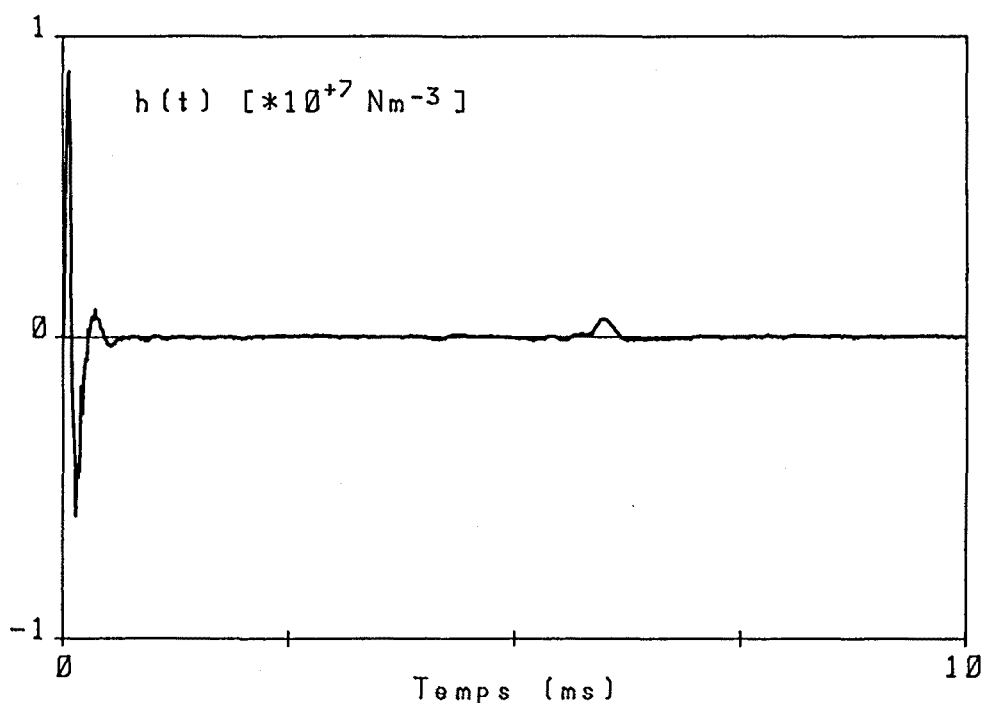


Fig. 5.11-18 Resposta impulsional experimental del prototipus de tenora representat a la figura 5.11-16.

La semblança de les respostes calculades entre sí és notable, però en comparar aquestes amb la resposta experimental s'aprecien diferències. En primer lloc les respostes calculades mostren que la reflexió a l'extrem obert del prototipus va acompanyada d'una sèrie de reflexions menors originades en els canvis de conicitat que presenta la modelització del pavelló mitjançant trams cònics. Caldria emprar un nombre més gran de trams per ajustar millor la reflexió calculada a l'experimental. I en segon lloc s'observa que la resposta experimental mostra una exponencial negativa inicial més intensa que la determinada per càlcul. Aquest fet és degut a les limitacions que presenta la obtenció de la resposta impulsional experimental per mitjà d'una descàrrega elèctrica, limitacions que es varen comentar al capítol 4 apartat 4.3.

Finalment es presenten les respostes impulsional de la tenora -figura 5.11-19- i del tible -figura 5.11-20- per a les seves notes més greus: el $Fa_2^\#$ de la tenora, que s'obté amb tots els forats de l'instrument tapats, i el La_2 del tible, que s'obté també amb tots el forats tapats excepte els quatre situats al pavelló que romanen sempre obert. A l'igual que en l'anterior exemple s'ha partit d'un impuls inicial de velocitat modelitzat per una ona quadrada d'amplada meitat de la de l'impuls inicial que s'observa a les respostes experimentals -capítol 4-.

Per ambdós instruments les respostes presenten un gran nombre de reflexions estretes que corresponen a les reflexions produïdes als forats tapats. Aquestes són més intenses en les respostes obtingudes per multiconvolució ja que la resolució emprada en el càlcul ha estat tres vegades superior a la proporcionada per la FFT⁻¹. A part d'aixó, la correlació entre les respostes obtingudes amb els dos mètodes és elevada.

Les reflexions més importants que es presenten en ambdós casos, pel paper que juguen en el govern de la canya i per tant en l'establiment del règim estacionari són: En el cas de la tenora, la reflexió produïda a l'extrem obert del pavelló, la qual és de poca magnitud degut a la gran obertura que presenta el pavelló de la tenora. I en el cas del tible, la reflexió produïda als forats del pavelló més propers a l'extrem d'entrada. La magnitud d'aquestes és més important que la de l'extrem obert de la tenora, fet que es tradueix en una millor espontaneïtat en l'execució de la nota, tal com s'exposa al capítol 6.

L'algorisme de multiconvolució permet determinar, a més de la resposta impulsional, l'evolució temporal de la distribució de pressions, ja que a cada pas de càlcul l'algorisme estableix quines són les ones resultants que es propaguen en ambdós sentits al llarg del tub.

Les figures de la 5.11-21 a la 5.11-24 mostren aquesta evolució temporal, en forma de gràfic tridimensional espai / temps / pressió, per algunes de les configuracions presentades en aquest apartat. En tots els casos la discretització espacial ΔL i la resolució temporal ΔT són les mateixes que s'han emprat en el càlcul de les respostes impulsional.

Les configuracions considerades són les següents:

Figura 5.11-21. Tub cilíndric de 20 mm de diàmetre i 1 m de longitud. La seva resposta impulsional es mostra a la figura 5.11-1.

Figura 5.11-22. Tub cònic truncat, del qual la figura 5.11-3 mostra les dimensions i la resposta impulsional.

Figures 5.11-23 i 5.11-24. El mateix tub cilíndric considerat anteriorment però amb un forat tancat i obert respectivament. Les seves respostes impulsionalen corresponen a les figures 5.11-15 i 5.11-12.

En tots els casos s'observa com l'ona inicial de pressió es propaga al llarg del tub, reflectint-se a les discontinuïtats i atenuant-se per causa de l'esmoreïment i la radiació per l'extrem obert -i pel forat si aquest és obert-. En el cas del tub cònic l'amplitud de les fluctuacions decreix inversament al radi de la secció tal com correspon a la propagació d'ones esfèriques. Finalment en els dos casos en que hi ha un forat, s'observa com es generen l'ona reflectida i l'ona transmesa en arribar l'impuls inicial a la secció on es situa el forat, així com l'evolució posterior d'ambdues ones. Quan el forat és obert però, el seguiment de les reflexions generades pel forat es veu molt dificultada un cop ha passat un cert temps i s'han superposat diverses reflexions, ja que aquestes són de magnitud i durada elevades.

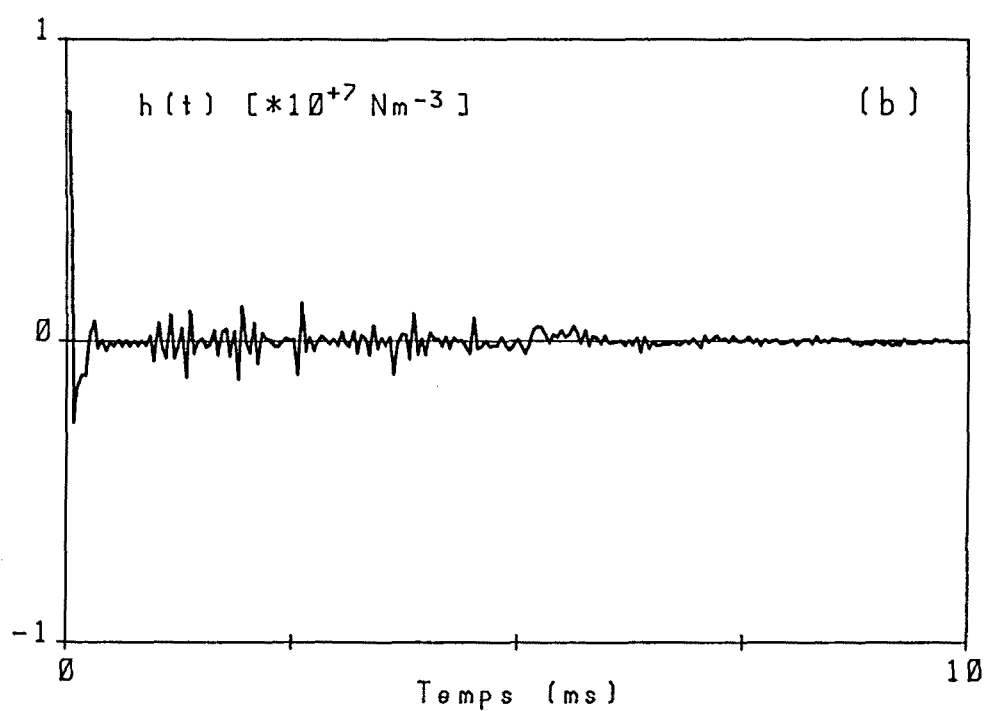
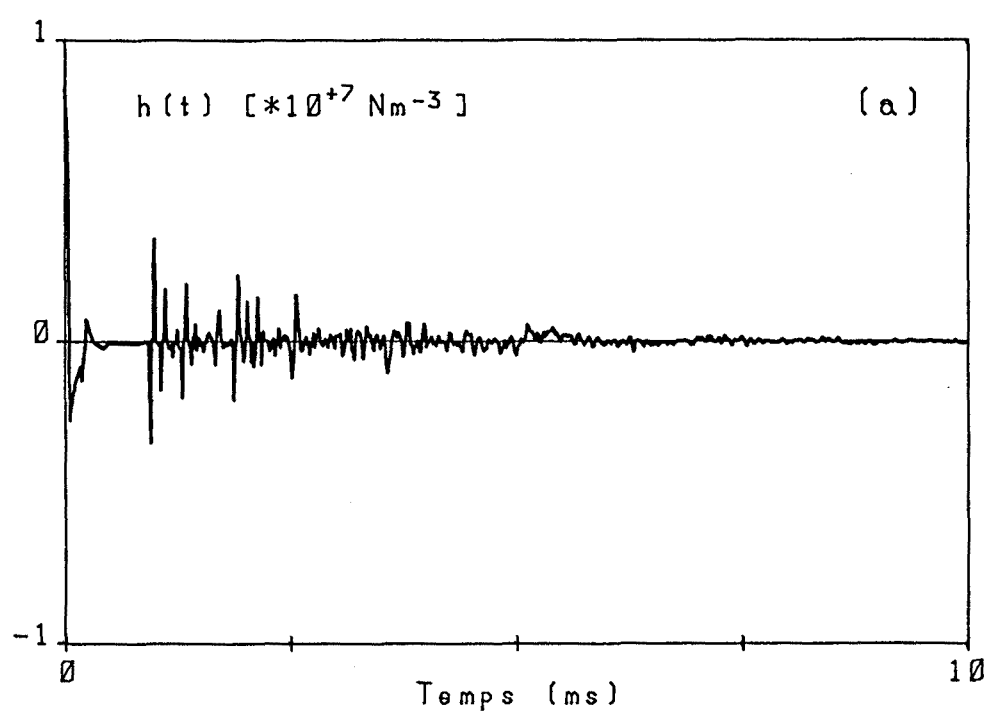


Fig. 5.11-19 Resposta impulsional de la nota $Fa_2^\#$ de la tenora.
 (a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.
 (b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

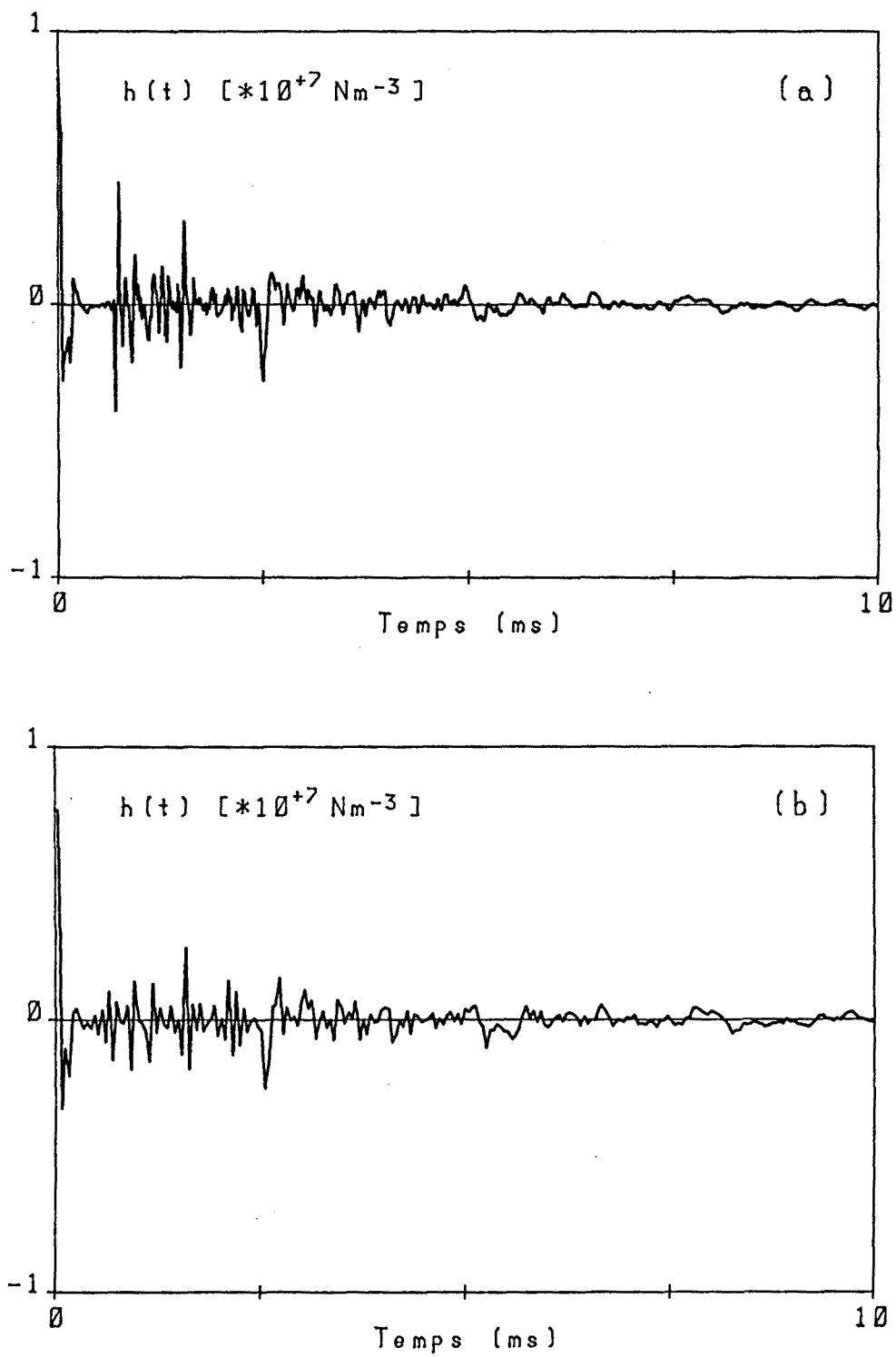


Fig. 5.11-20 Resposta impulsional de la nota La_2 del tible.

(a) Obtinguda mitjançant multiconvolució.

(b) Obtinguda com a FFT^{-1} de la impedància acústica.

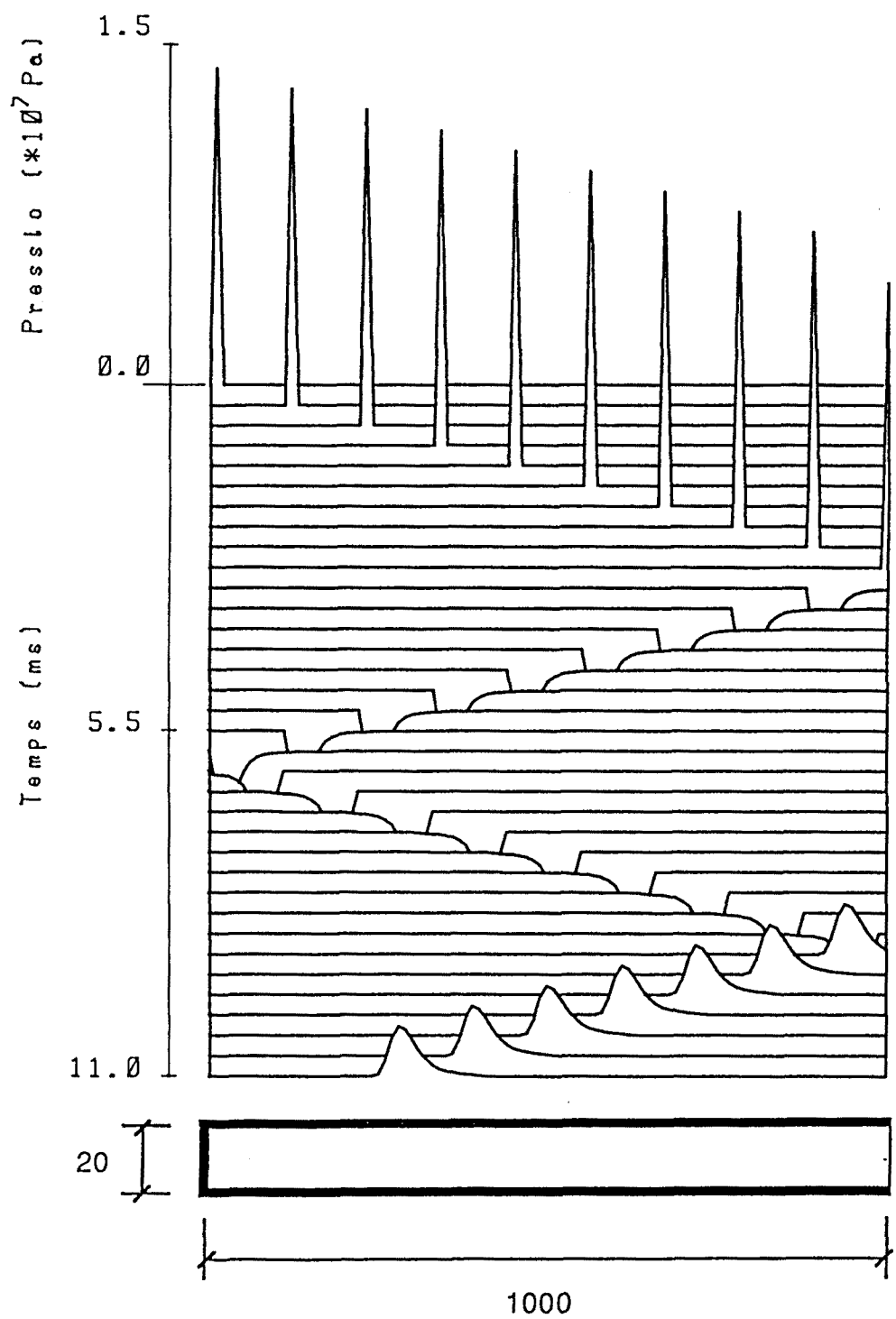


Fig. 5.11-21 Evolució temporal de la distribució de pressions a l'interior d'un tub cilíndric.

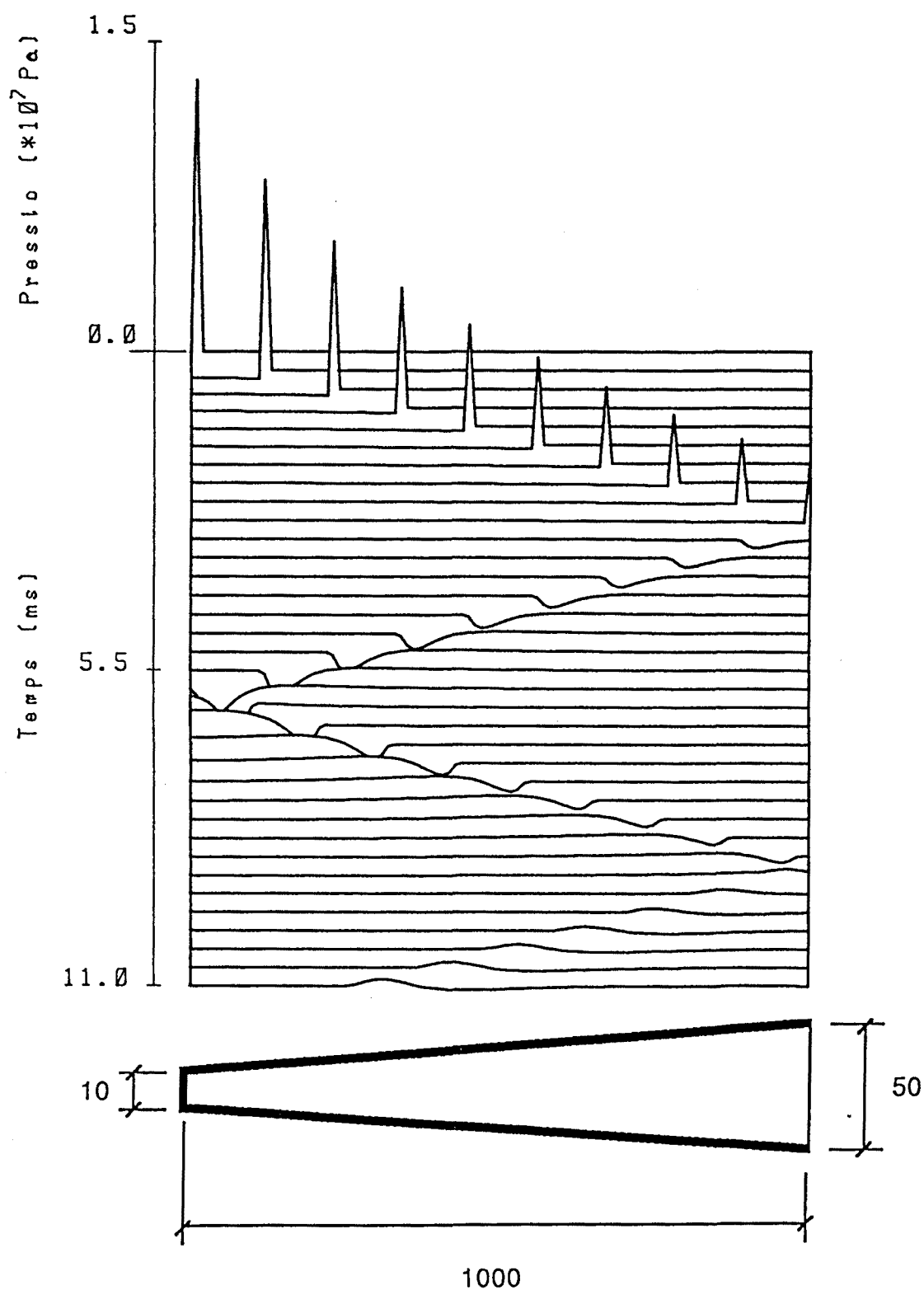


Fig. 5.11-22 Evolució temporal de la distribució de pressions a l'interior d'un tub cònic truncat.

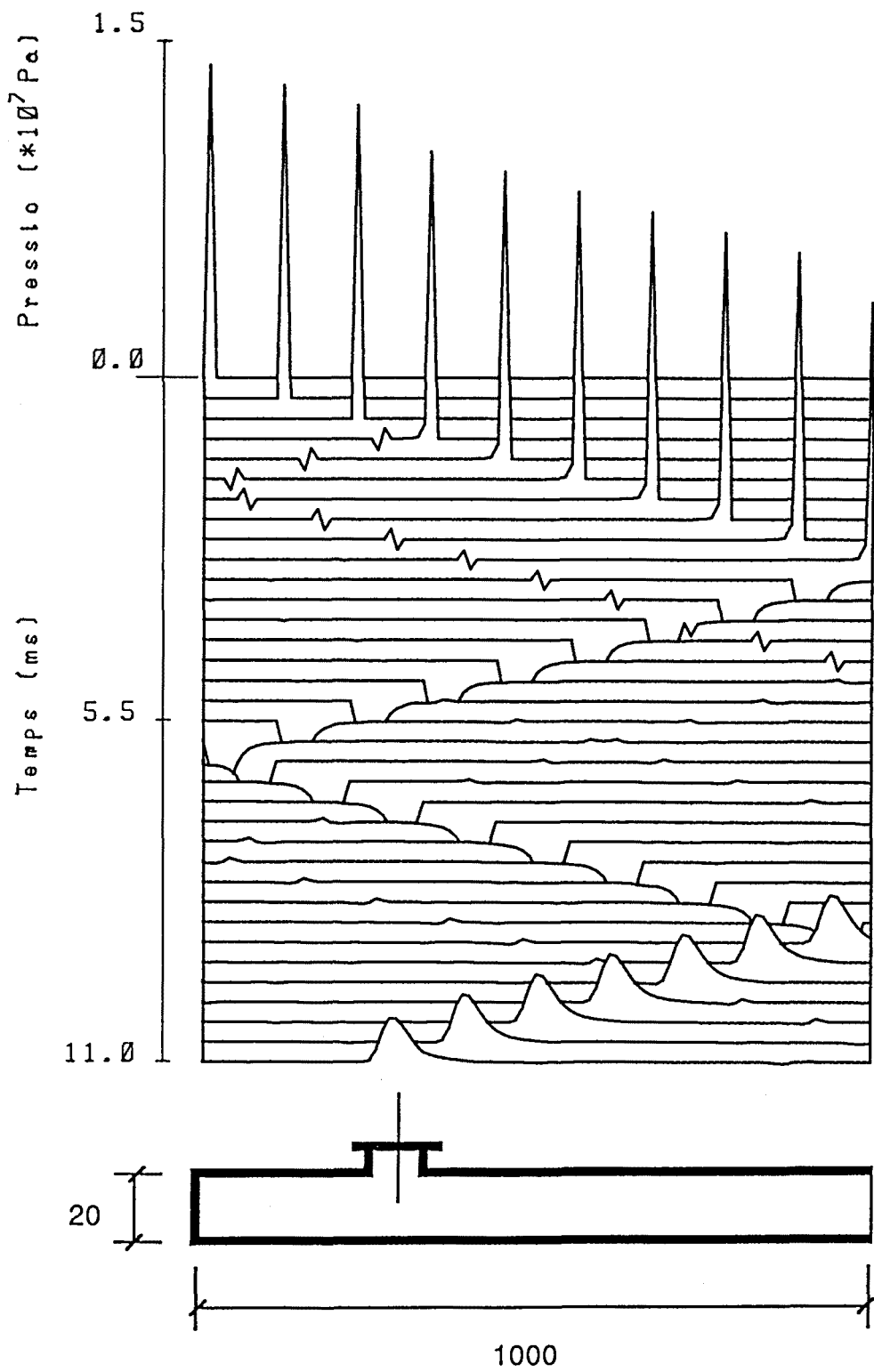


Fig. 5.11-23 Evolució temporal de la distribució de pressions a l'interior d'un tub cilíndric amb un forat tapat.

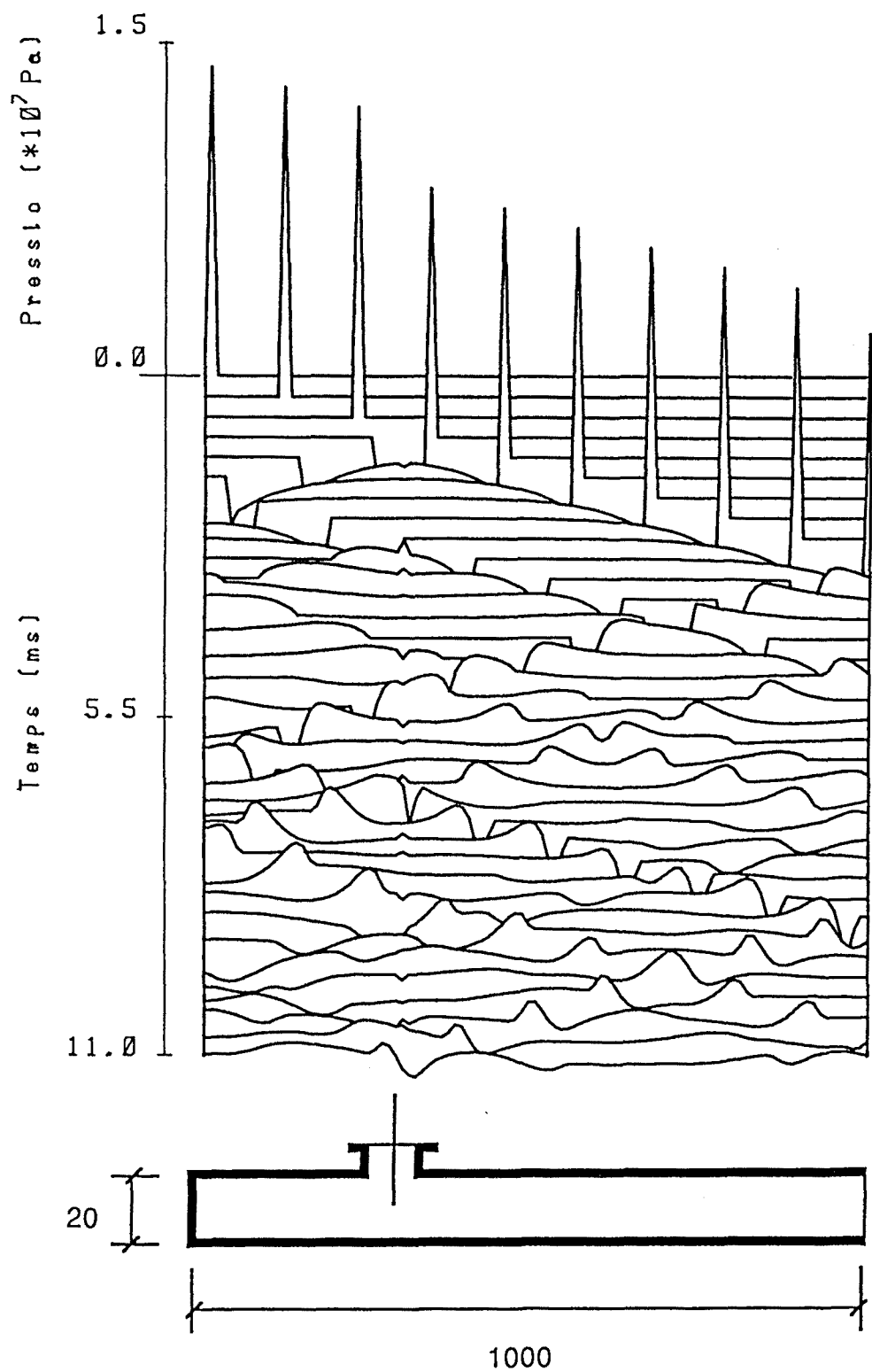


Fig. 5.11-24 Evolució temporal de la distribució de pressions a l'interior d'un tub cilíndric amb un forat obert.

6. ESTUDI DE L'ESPONTANEÏTAT.

6.1. INTRODUCCIÓ.

6.2. DESCRIPCIÓ DEL MECANISME D'AUTOEXCITACIÓ.

6.3. OBSERVACIÓ DELS ATACS.

6.4. RELACIÓ ENTRE LA RESPOSTA IMPULSIONAL I L'ESPONTANEÏTAT.

6. ESTUDI DE L'ESPONTANEÏTAT.

6.1. INTRODUCCIÓ.

Un dels aspectes a considerar a l'hora de caracteritzar un instrument musical de vent és la seva espontaneïtat. S'entén per espontaneïtat la facilitat i rapidesa amb que l'instrument passa a produir un so musical estable i mantingut en executar-se una nota.

L'espontaneïtat depèn fonamentalment de la manera com s'estableix l'autoexcitació, i per tant depèn dels factors que intervenen en els mecanismes que la fan possible:

Les característiques dinàmiques de la canya i de l'aire que es troba al seu interior.

El comportament acústic de la columna d'aire a l'interior de l'instrument.

I finalment la tècnica del instrumentista, el qual, gràcies al control que exerceix sobre el cabal d'aire que entra a l'instrument i sobre la pressió amb que prem la canya, és en última instància el responsable que es produeixi l'autoexcitació.

En aquest capítol s'analitzen els dos primers factors, a nivell qualitatiu, havent-se obviat el darrer perquè quan en no dependre de les característiques físiques de l'instrument, queda fora de l'àmbit del present treball.

L'observació dels atacs enregistrats mitjançant la tècnica presentada al capítol 2 ha permès conèixer la manera com s'estableix l'autoexcitació. A. Barjau presenta a la seva Tesi Doctoral un model teòric que simula el funcionament global de la tenora i del tible a partir de la modelització del comportament dinàmic de la canya i de l'aire que hi ha al seu interior, i del comportament acústic de la columna d'aire (Barjau 1987). El model ha permès determinar els transitoris d'atac per a diferents notes, els quals es comparen satisfactòriament amb els enregistrats experimentalment. D'aquesta manera s'ha obtingut una descripció contrastada de com es produeix l'autoexcitació.

L'anàlisi de les respostes impulsional, tant les experimentals com les obtingudes per càlcul, ha permès establir el paper que juga el comportament

acústic de la columna d'aire en l'establiment de l'autoexcitació. La resposta impulsional mostra directament quines són les reflexions més importants produïdes a les discontinuïtats de la columna d'aire a l'interior de l'instrument. Aquestes reflexions són les que desencadenen l'autoexcitació, i de la seva magnitud i forma en depèn en gran manera que l'autoexcitació es produeix ràpidament i amb facilitat.

6.2. DESCRIPCIÓ DELS MECANISMES D'AUTOEXCITACIÓ.

En els instruments de vent de perfil cònic truncat que empren una doble canya, l'autoexcitació es produeix mitjançant la combinació de dos mecanismes: El mecanisme d'acoblament i el mecanisme de Bernoulli.

El mecanisme d'acoblament és aquell en el qual el moviment d'obertura i tancament de la canya està directament controlat per les fluctuacions de pressió que arriben a la secció d'entrada de l'instrument provinents de la columna d'aire. Per comprendre el mecanisme d'acoblament és convenient analitzar la relació existent entre el cabal estacionari que passa a través de la canya i el salt de pressió definit per la diferència entre la pressió d'entrada a la canya -la que hi ha a la cavitat bucal de l'instrumentista- i la pressió de sortida -la que hi ha a la secció d'entrada del tudell-. La figura 6.2-1 mostra aquesta relació.

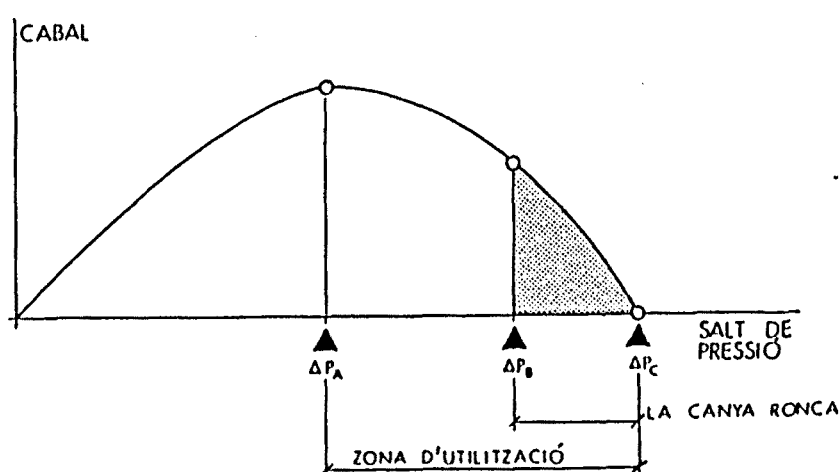


Fig. 6.2-1 Relació entre el cabal estacionari que passa a través de la canya i el salt de pressió.

Per a salts de pressió petits, la canya actua com una obertura fixa i la relació entre el cabal i el salt de pressió és la pròpia de la pèrdua de càrrega deguda a l'estretament que suposa el pas de l'aire a través de la canya. A mesura que augmenta el salt de pressió entra en joc l'elasticitat de la canya de manera que aquesta tanca progressivament i disminueix el cabal entrant. S'arriba finalment a un valor limit ΔP_a a partir del qual el cabal disminueix en funció del salt de pressió. La zona de pendent negatiu de la gràfica defineix les condicions en les quals es pot establir el mecanisme d'acoblament -zona d'utilització-.

Quan a la secció d'entrada del tudell arriba una sobrepressió provinent de la columna d'aire, el salt de pressió minva, la canya s'obra i dona pas a un augment de cabal entrant que fa augmentar encara més la pressió, reforçant així la sobrepressió existent. Igualment, si el que arriba és una depressió, la canya es tanca i minva el cabal entrant, la qual cosa fa que disminueixi encara més la pressió, i la depressió també es veu així reforçada. La canya actua per tant com una vàlvula que regula el cabal entrant en funció del salt de pressió.

Per tal que el mecanisme d'acoblament sigui eficaç cal que el moviment de la canya es presenti aproximadament en fase amb la fluctuació de pressió. Això només és factible en el cas de canyes que, per causa de la seva fleble inèrcia, presentin freqüències pròpies d'oscil·lació elevades.

Si el mecanisme d'acoblament ha de funcionar tot sol, és necessari que la fluctuació de pressió que arriba a la secció d'entrada sigui prou important per tal de poder moure la canya. Aquesta condició només es compleix en instruments de perfil interior aproximadament cilíndric, com ara el clarinet. La fluctuació de pressió té el seu origen en les reflexions que es produeixen a les discontinuïtats de la columna d'aire a l'interior de l'instrument. La reflexió produïda a l'extrem obert de l'instrument - cas que tots els forats estiguin tapats - o en el forat obert que defineix l'afinació de la nota, és la que controla el moviment de la canya i defineix la periodicitat del so produït. Si bé en un perfil cilíndric aquesta reflexió és de magnitud elevada, en un perfil cònic truncat amb un truncament no gaire elevat, la reflexió es massa feble per moure suficientment la canya de manera que ella sola estableixi l'autoexcitació. Les respostes impulsional·s calculades d'un tub cilíndric i d'un tub cònic truncat mostrades al capítol 5 -figures de la 5.11-1 a la 5.11-4- així ho confirmen. El mecanisme d'acoblament per tant no pot ser l'únic responsable de

l'establiment de l'autoexcitació en instruments de perfil cònic truncat, com ara el tible i la tenora.

El mecanisme de Bernoulli és essencial en el funcionament dels instruments que empren dobles canyes. En ells les dues llengüetes que constitueixen la doble canya són molt properes i delimiten una secció de pas estreta, especialment als extrems laterals de les llengüetes -figura 6.2-2-. Com a conseqüència la velocitat de l'aire que passa a través de la canya és elevada i genera una depressió que tendeix a acostar-les -Pressió de Bernoulli-. En contraposició actua la pròpia elasticitat de la canya que tendeix a mantenir les llengüetes separades, establint-se així una situació d'equilibri. La relació entre la pressió de Bernoulli i l'obertura de la canya és no lineal, de manera que el seu valor creix ràpidament per a obertures petites. Per sota d'una obertura crítica la pressió de Bernoulli creix més ràpidament que la d'origen elàstic, la qual cosa condueix a un comportament inestable que ocasiona el tancament de la canya.

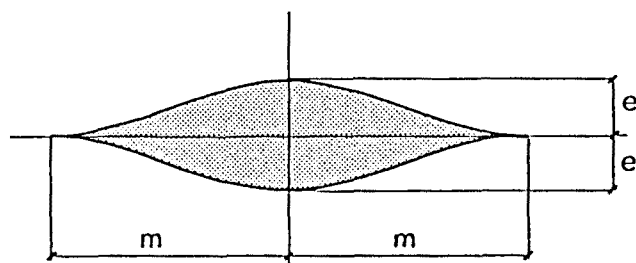


Fig. 6.2-2 Representació transversal d'una canya.

Quan arriba a la secció d'entrada del tudell una reflexió provinent de la columna d'aire, s'estableix un salt de pressió entre les seccions d'entrada i de sortida de la canya. Si el salt de pressió és tal que ocasiona oscil·lacions de la canya que no la porten a ultrapassar l'obertura crítica, predomina la força elàstica i el moviment de la canya és estable. En aquestes condicions el moviment de la canya és degut fonamentalment al mecanisme d'acoblament, reforçat per la presència de la pressió de Bernoulli. Es diu aleshores que el règim acústic que s'estableix és un *règim no batent*.

Ara bé per a salts de pressió elevats, si la canya arriba a ultrapassar l'obertura crítica, la força elàstica no pot compensar la pressió de Bernoulli, amb la qual cosa la canya tanca fins a cloure totalment. Aquest comportament, marcadament inestable, constitueix el fonament del mecanisme de Bernoulli en l'anomenat *règim batent*, règim caracteritzat pel tancament de la canya a cada cicle. El tancament ràpid de la canya genera una forta depressió que reforça la fluctuació inicial, establint-se d'aquesta manera l'autoexcitació de l'instrument.

Tal com es dedueix de la exposició anterior, ambdós mecanismes, el d'acoblament i el de Bernoulli, són complementaris ja que si bé el mecanisme d'acoblament és el que inicia l'autoexcitació en iniciar el moviment de la canya, el de Bernoulli actua reforçant aquest moviment, i en el cas de règim batent passa a ser el mecanisme principal de l'autoexcitació.

Els instruments de perfil aproximadament cònic truncat presenten reflexions poc intenses, les quals no podrien mantenir un règim autoexcitat sense la presència del mecanisme de Bernoulli. Es per aquesta raó que aquest tipus d'instruments, entre ells el tible i la tenora, empen dispositius de doble canya.

6.3. OBSERVACIÓ DELS ATACS.

La forma que presenten els atacs del tible i la tenora es relaciona estretament amb la manera en que s'estableix l'autoexcitació en aquests instruments. A efectes de facilitar l'exposició es tornen a presentar en aquest apartat alguns dels atacs enregistrats experimentalment que ja es varen presentar al capítol 2.

La figura 6.3-1 mostra els atacs picats de la nota Do_3 de la tenora en intensitats piano i forte. Els dos atacs comencen amb l'arribada d'una primera depressió de poca intensitat que inicia el moviment de la canya bàsicament degut al mecanisme d'acoblament. Progressivament el moviment de la canya es va intensificant i la pressió de Bernoulli passa a jugar un paper cada cop més important, fins que es fa prou intensa com per arribar a cloure la canya. A partir d'aquest instant l'ona interna presenta a cada cicle una forta depressió associada al tancament sobtat de la canya i el règim estacionari que s'estableix passa a ser un règim batent.

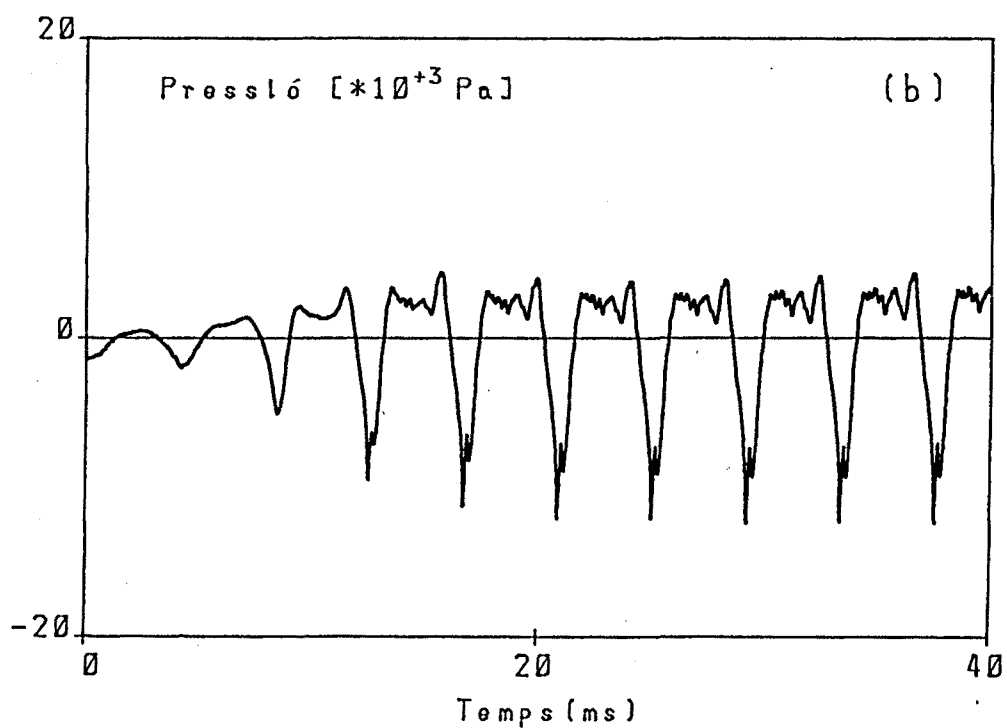
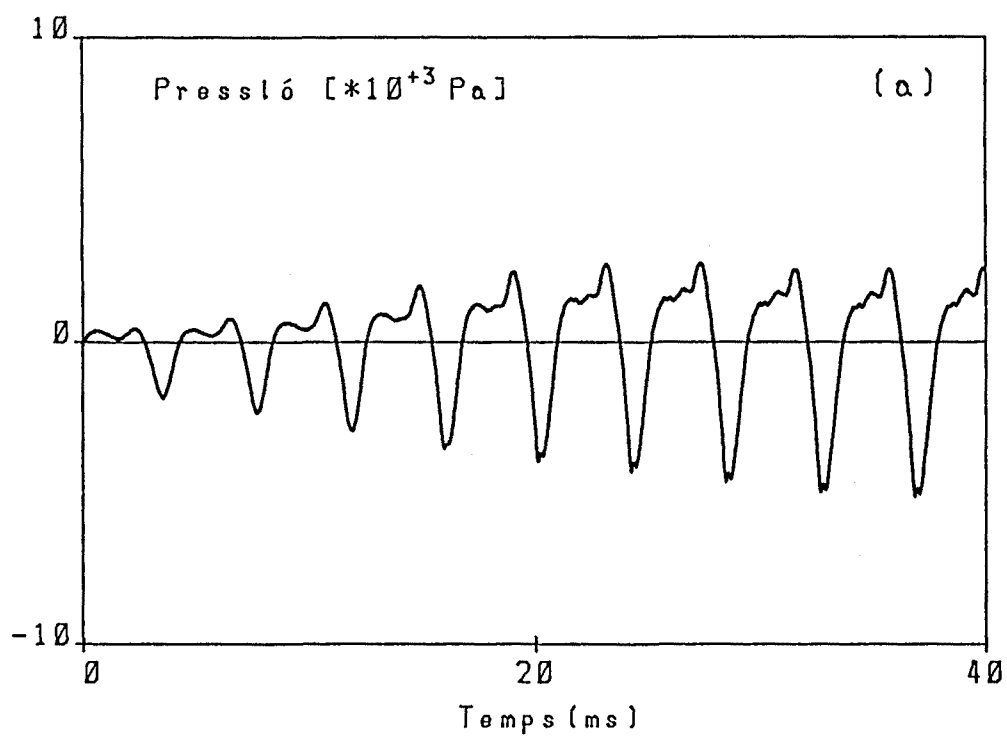


Fig. 6.3-1 Atac de la nota Do_3 de la tenora en intensitats "piano" (a) i "forte" (b).

L'atac forte assoleix el règim batent ja a partir del tercer cicle i la depressió que s'observa a cada cicle és intensa i aguda, cosa que palesa un tancament molt ràpid de la canya. Per contra l'atac piano no arriba al règim batent fins passats un nombre considerable de cicles a partir de l'inici de l'atac, i la depressió és més fleble i suau que en l'atac forte.

En algunes ocasions els atacs piano no arriben a assolir el règim batent, tal com s'observa en alguns dels atacs piano del tible en els quals la forma d'ona és molt aproximadament sinusoïdal -figures de la 2.3-17 a la 2.3-19-. Aquesta diferència prové del fet que en l'execució de les notes forte l'instrumentista introdueix l'aire a pressió més elevada que en l'execució de les notes piano. El salt de pressió és més elevat i per tant el mecanisme de Bernoulli és més intens.

En comparar els atacs de les notes greus amb els de les notes més agudes s'observa que els darrers presenten depressions més agudes -tancaments més ràpids de la canya- que els primers. En executar notes agudes l'instrumentista prem la canya amb els llavis, al mateix temps que augmenta la pressió a la que bufa. A resultes d'això la velocitat de l'aire que passa a través de la canya augmenta i el mecanisme de Bernoulli es veu reforçat. A part, el fet de premer més fort la canya fa augmentar la rigidesa del conjunt canya-llavis de l'instrumentista, amb el que la seva resposta és més ràpida. La figura 6.3-2 en la que es comparen els atacs forte de les notes Do_3 i La_4 de la tenora constata aquest fet. Igualment s'observa el mateix fenomen en comparar els atacs corresponents als xiulets i als rogalls tant en la tenora com en el tible.

6.4. RELACIÓ ENTRE L'ESPONTANEÏTAT I LA RESPOSTA IMPULSIONAL.

La resposta impulsional descriu la resposta dinàmica de la columna d'aire de l'instrument quan s'introdueix un impuls de cabal a la secció d'entrada, i ve definida per l'arribada a aquesta secció, que es manté tancada, de les reflexions que es produeixen successivament a les discontinuïtats del perfil interior de l'instrument. La seva importància com a eina per a l'anàlisi de l'espontaneïtat resideix en el fet que descriu directament les reflexions. De la forma i magnitud d'aquestes en depenen fonamentalment l'inici de l'autoexcitació i l'establiment d'un règim acústic estacionari.

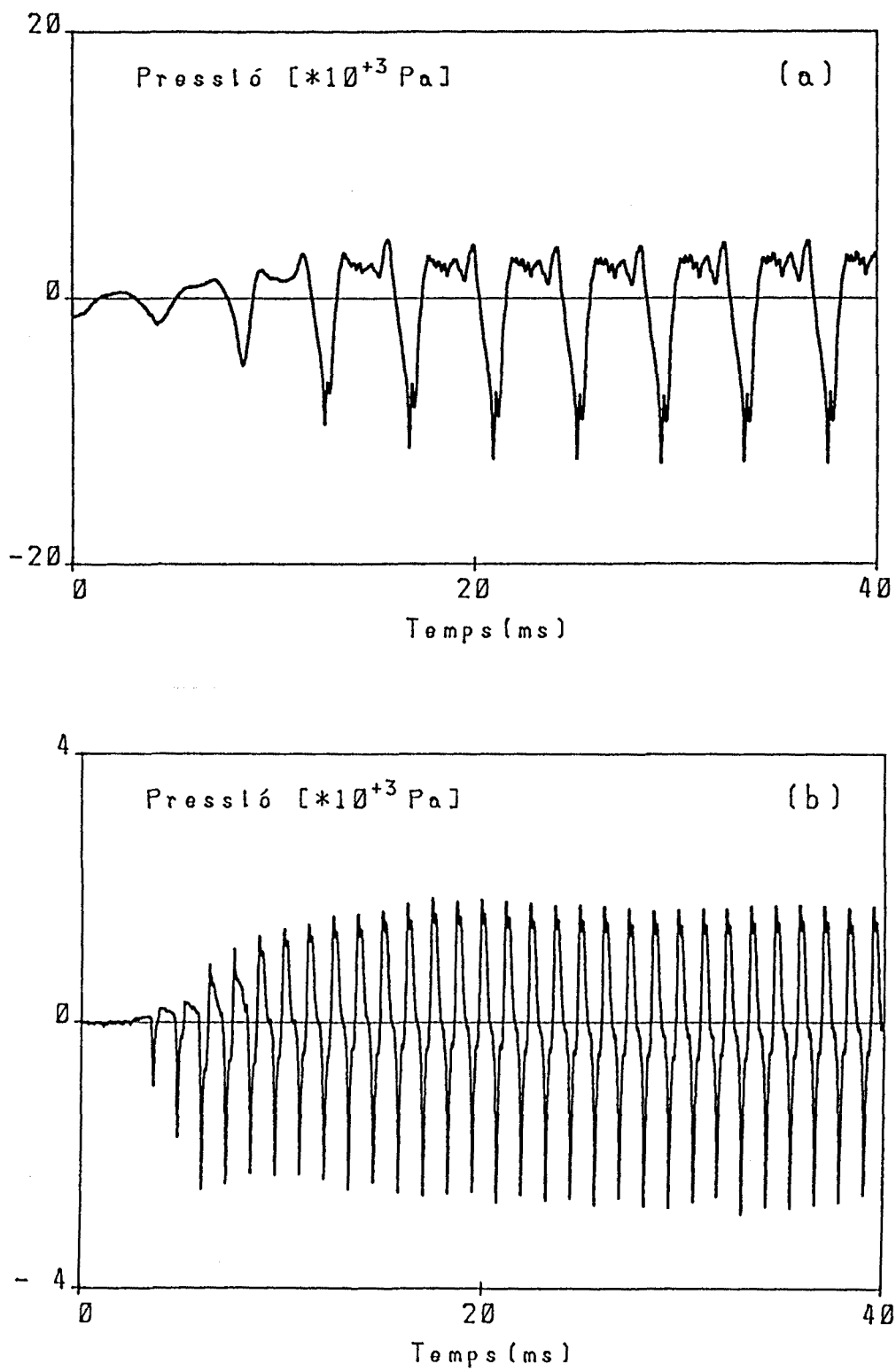


Fig. 6.3-2 Atacs de les notes Do_3 (a) i La_4 (b) de la tenora en intensitat "forte".

Quan s'inicia l'atac d'una nota, es produeix una pertorbació de pressió que es propaga al llarg de l'instrument i es reflecteix a les discontinuïtats. De les reflexions produïdes, la que juga un paper principal a l'hora d'establir un règim estacionari amb l'afinació corresponent a la nota és la que té lloc al forat obert més proper a l'extrem d'entrada -forat d'afinació- si bé les reflexions provinents de forats més allunyats poden col·laborar en la obtenció del règim acústic desitjat. Si la nota s'executa amb tots els forats tapats, cas del $Fa_2^{\#}$ de la tenora, aleshores la reflexió principal és la que té lloc a l'extrem obert de l'instrument.

La reflexió principal arriba a l'extrem d'entrada i interacciona amb la canya de la manera que s'ha exposat en parlar dels mecanismes d'autoexcitació. La interacció reforça l'ona i aquesta es propaga de nou vers l'extrem obert iniciant-se un nou cicle. La periodicitat de l'ona interna així produïda, i per tant l'afinació, depèn fonamentalment de la distància que separa l'extrem d'entrada de la localització del forat, o bé de l'extrem obert.

En el cas dels instruments de perfil aproximadament cònic truncat, entre ells el tible i la tenora, el període de l'ona interna és igual al temps que tarda el so en recórrer dos cops aquesta distància més el retard introduït per la resposta dinàmica de la canya en interaccionar amb la reflexió. La figura 6.4-1 representa l'atac i la resposta impulsional de la nota La_2 del tible, nota per a la qual només estan oberts els quatre forats situats al pavelló. S'observa que el període mesurat sobre l'atac és superior al que es dedueix de la resposta impulsional degut al retard introduït per la dinàmica de la canya.

En el cas dels instruments de perfil aproximadament cilíndric -el clarinet per exemple- el període ve definit pel temps que tarda el so en recórrer quatre cops la distància abans esmentada, més el retard degut a la resposta de la canya. Aquest fet en principi sorprenent s'explica per la diferent forma que presenten les reflexions de la resposta impulsional en un cas i en l'altre.

La figura 6.4-2 mostra la resposta impulsional d'un tub cilíndric de 20 mm de diàmetre i 1 m de longitud, ja presentada a la figura 5.11-1, i la figura 6.4-3 mostra la resposta impulsional d'un tub cònic truncat de 2 mm de diàmetre a l'entrada, 20 mm de diàmetre a la sortida i 1 m de longitud. Ambdues respostes s'han determinat emprant el mètode de la multiconvolució.

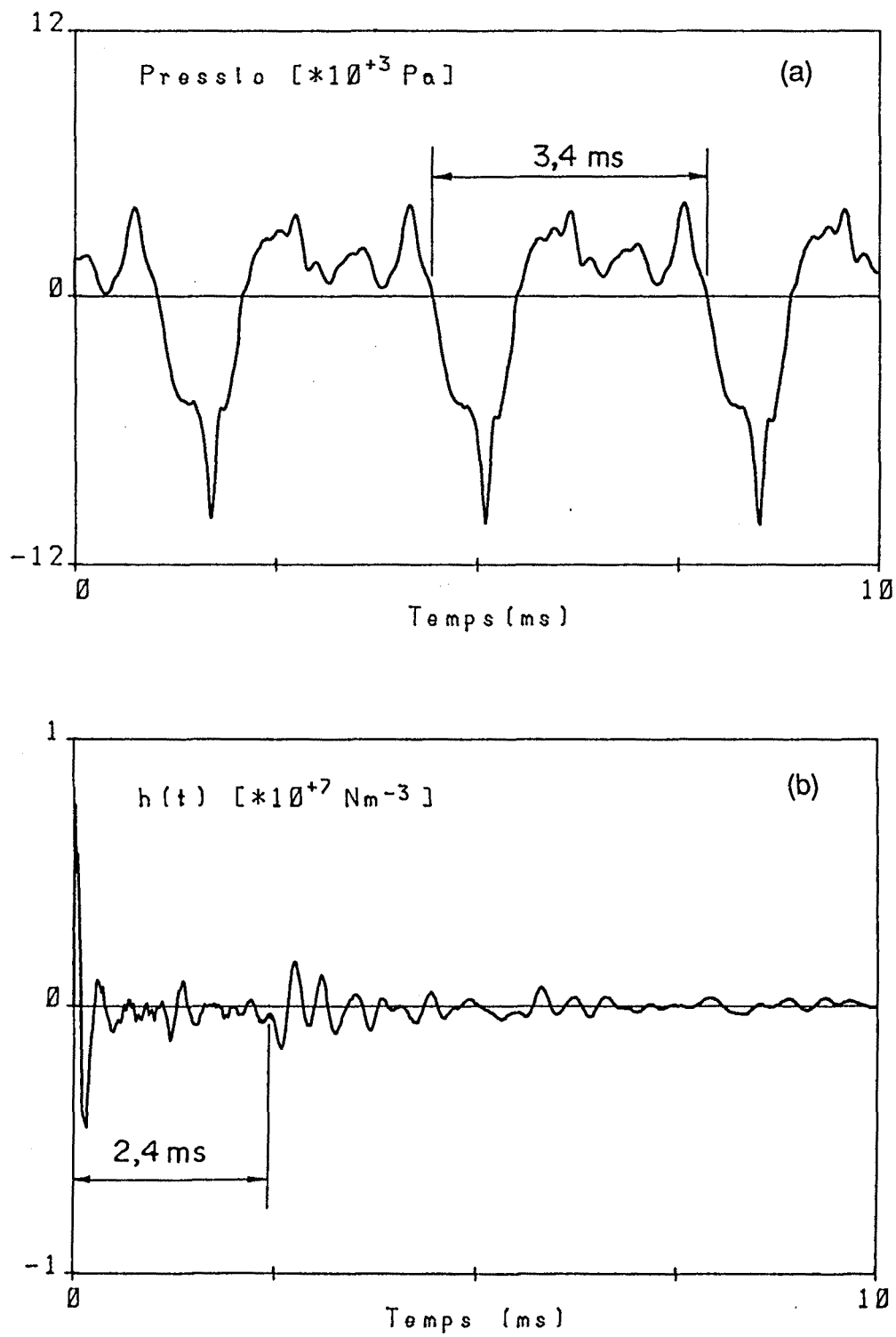


Fig. 6.4-1 Comparació del període de la nota La_2 del tible mesurat sobre l'atac (a) i mesurat sobre la resposta impulsional (b).

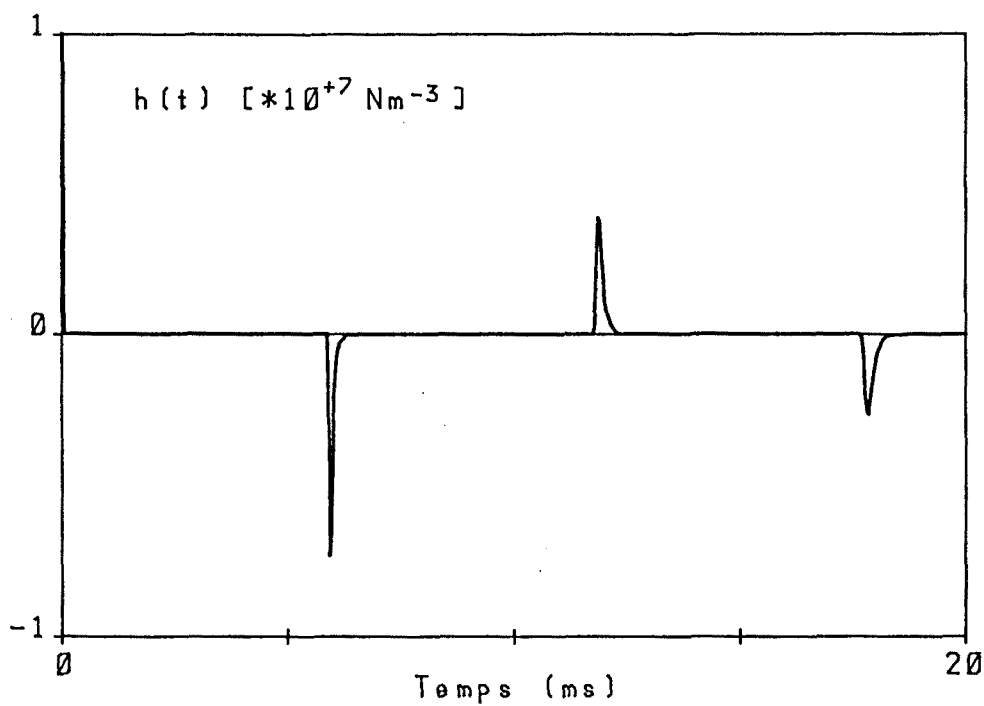


Fig. 6.4-2 Resposta impulsional d'un tub cilíndric determinada per mitjà de l'algorisme de multiconvolució.

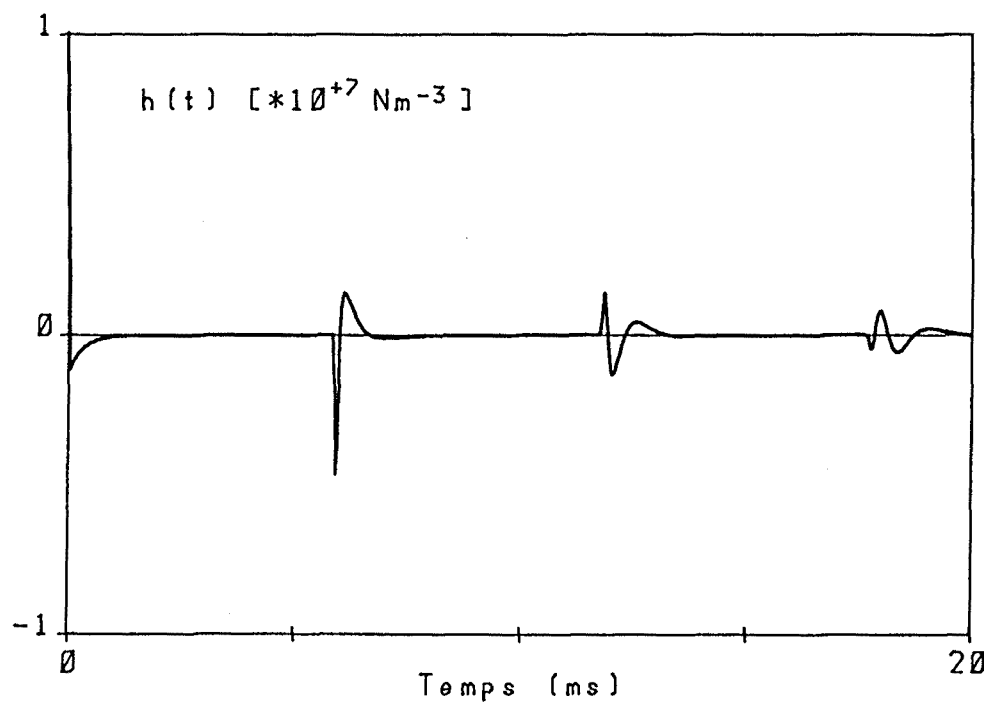


Fig. 6.4-3 Resposta impulsional d'un tub cònic determinada per mitjà de l'algorisme de multiconvolució.

El tub cilíndric presenta reflexions intenses positives i negatives alternativament. Si es considera que els instruments de perfil interior aproximadament cilíndric acostumen a emprar dispositius de llengüeta única, en els quals l'autoexcitació es produeix bàsicament per mitjà del mecanisme d'acoblament, la interacció de les reflexions amb el dispositiu produeix una ona interna de període aproximadament igual al temps que separa les reflexions d'igual signe que s'observen a la resposta impulsional.

Per contra el tub cònic truncat presenta reflexions formades per una fluctuació positiva i una de negativa. Pensant en la utilització d'un dispositiu de doble canya, la interacció de la canya amb les reflexions depèn de la intensitat i forma d'aquestes. Si la doble fluctuació, malgrat ser intensa, és de poca extensió en el temps, la quantitat de moviment que la reflexió pot transmetre a la canya -la qual ve definida per l'àrea de la reflexió- és petita i com a conseqüència el moviment de la canya no es veu pràcticament afectat per la interacció. Ara bé, si la reflexió a part de ser intensa es prolonga suficientment en el temps de manera que la seva durada sigui del mateix ordre que el temps de resposta de la canya, la fluctuació induirà un moviment a la canya suficient perquè entri en joc el mecanisme de Bernoulli. D'aquesta manera cada cop que arriba una reflexió es produeix el tancament ràpid de la canya i es genera la depressió característica d'aquest mecanisme la qual va apareixent cicle rera cicle. El període de l'ona interna és aleshores aproximadament igual al temps que separa les reflexions observades a la resposta impulsional. Aquest temps és la meitat de l'observat en el cas del tub cilíndric.

Es pot concloure així que en els instruments tipus clarinet les reflexions controlen directament el moviment de la canya i per tant l'autoexcitació, mentre en els instruments de perfil cònic que empen un dispositiu de doble canya les reflexions actuen com a senyals de referència per iniciar el tancament de la canya sota l'efecte del mecanisme de Bernoulli.

Les reflexions generades per un forat obert en un tub cilíndric i en un tub cònic són anàlogues a les produïdes a l'extrem obert, i per tant tot el raonament que s'ha exposat és igualment aplicable en aquest cas.

Un cop s'ha analitzat com influeixen les reflexions en l'establiment de l'autoexcitació es poden analitzar aspectes concrets relacionats amb

l'espontaneïtat del tible i la tenora.

La nota $Fa_2^\#$ de la tenora s'executa amb tots els forats tapats, i per tant la reflexió responsable de l'autoexcitació és la de l'extrem obert. Tal com s'observa a les respostes impulsionalment experimentals i calculades del prototipus de tenora presentat al capítol anterior -figures 5.11-17 i 5.11-18- aquesta reflexió és molt feble, fet que dificulta la interacció entre la canya i la columna d'aire i fa que aquesta nota sigui especialment difícil d'executar. La opinió generalitzada dels instrumentistes de tenora així ho ha confirmat. En el cas del tible no s'adverteix aquest fet ja que per a totes les digitacions els quatre forats del pavelló romanen sempre oberts i generen reflexions més intenses.

S'ha comprovat que els forats oberts de diàmetre més gran i alçada més petita són els que produeixen reflexions més importants -figures de la 5.11-11 a la 5.11-13- i per tant són els que permeten una execució de la nota més espontànea. Malgrat això el diàmetre dels forats està limitat per les dimensions transversals de l'instrument i pel fet d'haver-se de poder tapar amb una sabatilla o bé amb els propis dits de l'instrumentista.

Pel que fa als forats tapats, si bé produeixen reflexions intenses, aquestes són molt estretes i formades per una doble fluctuació positiva i negativa -veure figures 5.11-14 i 5.11-15-. Tal com s'ha analitzat anteriorment, això fa que la seva incidència sobre el moviment de la canya sigui pràcticament nul i no afectin l'espontaneïtat de l'instrument. Les reflexions dels forats tapats però tenen importància pel que fa al timbre de l'instrument ja que afegeixen a l'ona radiada components harmòniques d'alta freqüència.

Les reflexions que poden tenir una influència negativa a l'espontaneïtat són les produïdes a les discontinuïtats de diàmetre que presenten les unions dels diferents cossos que componen l'instrument. Canvis de diàmetre en seccions lluny de la secció d'entrada donen lloc a reflexions assemblades a les dels forats oberts. En les respostes impulsionalment experimentals del tible i la tenora s'han identificat aquestes reflexions les quals en alguns casos són d'igual magnitud que les produïdes pel primer forat obert. Quan es presenta una discontinuïtat d'aquest tipus aprop del forat obert de la nota, la reflexió que provoca pot interaccionar amb la canya i establir així una periodicitat diferent

de la que correspondria a la nota en qüestió. I si la canya respon indistintament a les reflexions provinents del forat obert o bé de la discontinuïtat, es produirà una ona interna sense periodicitat definida. Sovint es diu que són notes que "ronquen".

Un altre reflexió que cal considerar és la que es produeix a la unió del tudell amb el cos superior de l'instrument. En aquesta localització es presenta un canvi de conicitat i, degut a imperfeccions en l'ajust d'ambdues peces, acostuma a presentar-se també un canvi de diàmetre o una petita cavitat anular. La figura 6.4-4 mostra les respostes impulsional del prototipus de tenora presentat al capítol anterior, en aquest cas sense pavelló. La resposta (a) correspon a una unió entre el tudell i el cos superior sense discontinuïtat de diàmetre i la resposta (b) correspon al cas d'un augment de diàmetre a la unió de 0,5 mm. Ambdues respostes s'han obtingut mitjançant el mètode de la multiconvolució.

S'observa que la reflexió provocada pel canvi de conicitat és feble, de la qual cosa es desprèn que no ha d'afectar apreciablement l'espontaneïtat. Pel que fa a la reflexió provocada pel canvi de diàmetre, en aquest cas la reflexió, en trobar-se la secció prop del vèrtex del tudell, és molt estreta i formada per una doble fluctuació de pressió. Això fa que el seu efecte sobre el moviment de la canya sigui pràcticament nul a l'igual que succeïa amb les reflexions dels forats tapats. Aquest mateix raonament és aplicable quan es presenta una cavitat anular.

Les dimensions del tudell incideixen notablement sobre l'espontaneïtat. En concret incideix la distància r_0 que separa el vèrtex del tudell de la secció d'entrada, de la qual en depèn directament la magnitud i durada de l'estela negativa que acompanya l'impuls inicial de pressió que s'observa a la resposta impulsional -veure al capítol 5 l'expressió 5.10-3-. Tudells progressivament més curts presenten conicitats més elevades i per tant distàncies r_0 més curtes. Això implica que l'ona inicial de pressió presenti una estela intensa però estreta. Al contrari, tudells progressivament més llargs presenten esteles menys intenses encara que de més llarga durada. La forma de l'ona inicial determina quina és la forma de les ones reflectides que arriben a l'extrem d'entrada.

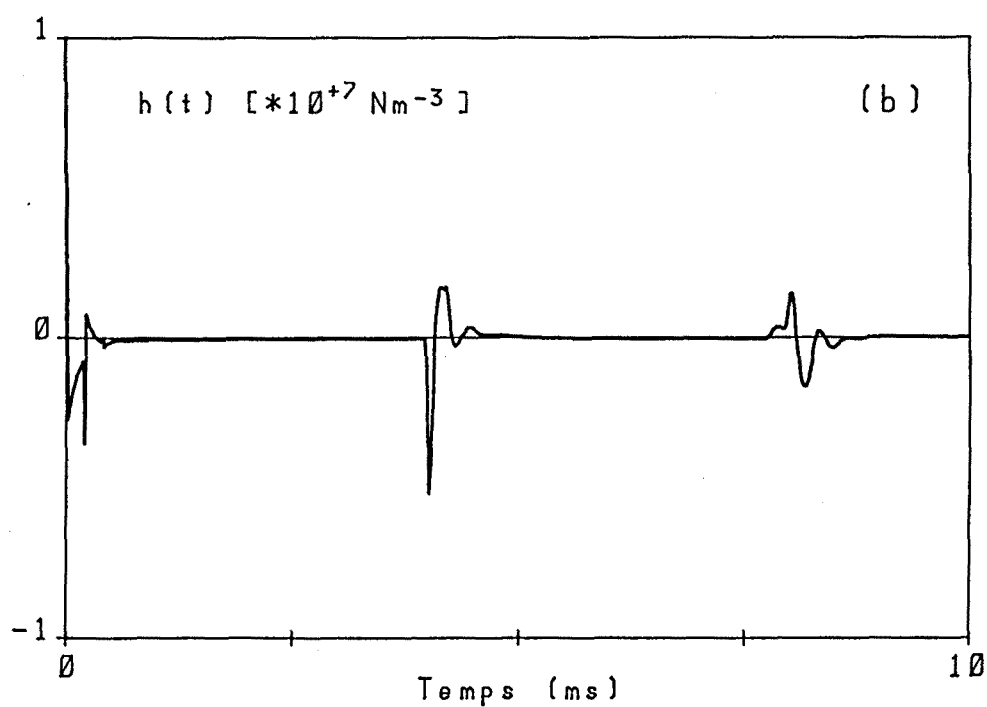
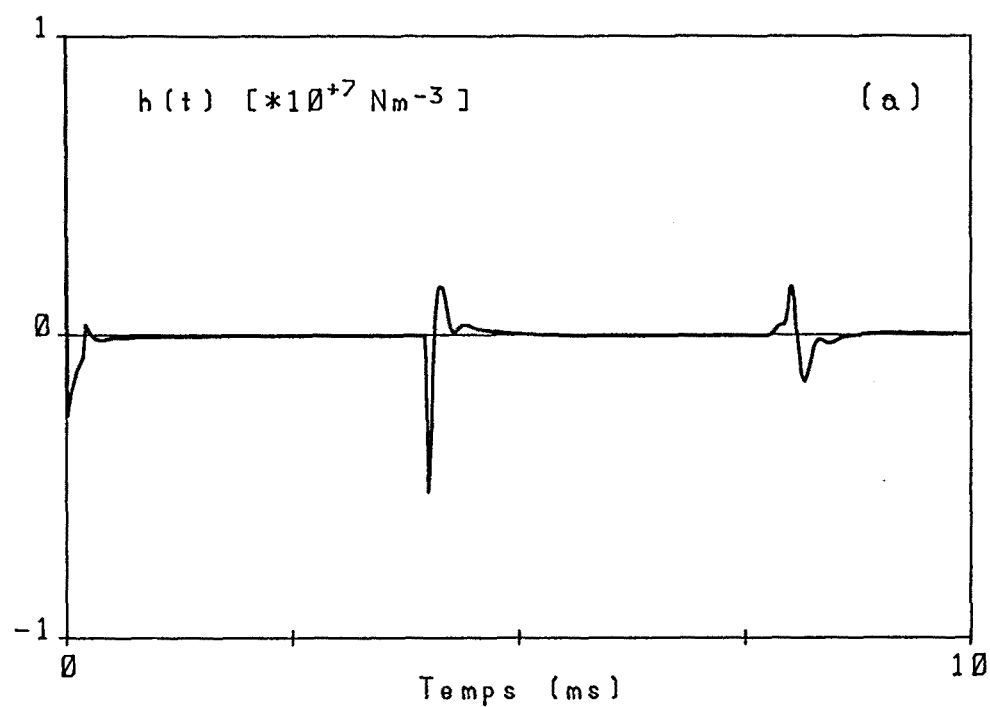


Fig. 6.4-4 Respostes impulsional del prototipus de tenora sense pavelló. (a) Amb un tudell de 35 mm de longitud. (b) Amb el mateix tudell però amb un augment de diàmetre a la unió de 0,5 mm.

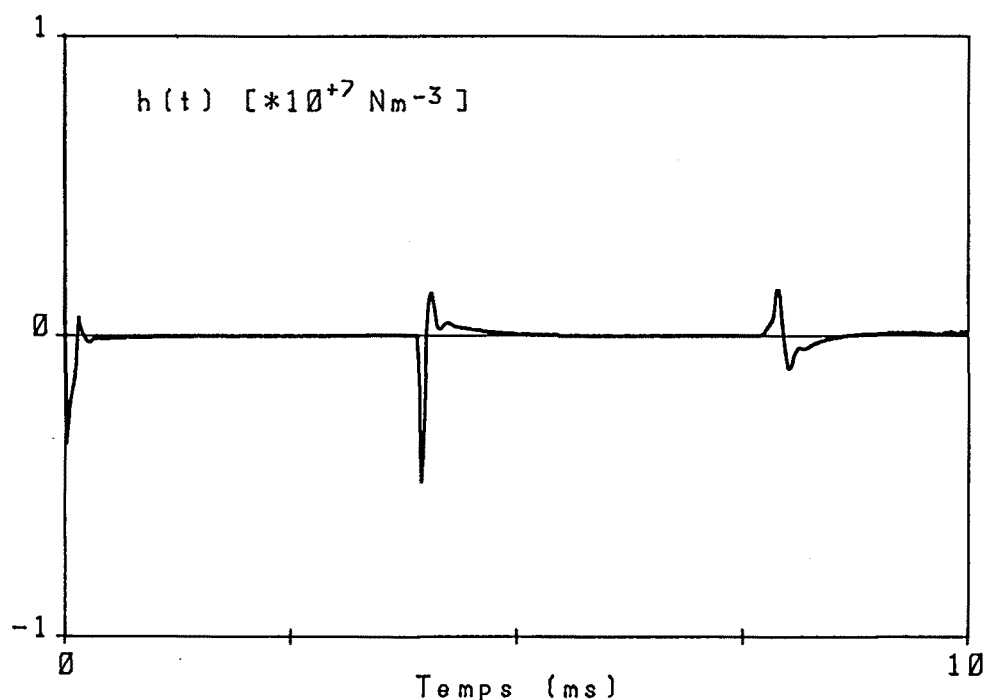


Fig. 6.4-5 Resposta impulsional del prototipus de tenora sense pavelló i amb un tudell de 25 mm de longitud.

La figura 6.4-5 mostra de nou la resposta impulsional del prototipus de tenora sense pavelló, en el qual s'ha substituït el tudell de 35 mm per un d'iguals diàmetres extrems però 10 mm més curt. La comparació amb la figura 6.4-4 permet comprovar que en aquest segon cas l'ona inicial de pressió presenta una estela més estreta i intensa, i com a conseqüència les ones reflectides a l'extrem obert també són de més curta durada. D'aquest fet es dedueix que tudells molt curts impliquen reflexions estretes, encara que intenses, les quals poden no ser adequades per interaccionar amb la canya en ser la seva durada molt inferior al temps de resposta de la canya. Per altra banda tudells massa llargs impliquen reflexions més llargues en el temps però menys intenses, les quals també poden ser insuficients per moure la canya fins al punt d'endegar el mecanisme de Bernoulli. La longitud del tudell s'ha d'escollir per tant en funció del comportament dinàmic de la canya per tal d'adequar la durada de les reflexions al temps de resposta de la canya.

Un altre efecte relacionat amb la longitud del tudell és la variació del color tímbric de l'instrument. La forma més aguda i estreta de les reflexions produïdes quan el tudell és curt implica que el contingut en harmònics d'alta freqüència en l'ona radiada sigui més elevat i per tant que el so sigui més "brillant". Aquest fet ja es va comprovar en realitzar l'anàlisi espectral del so radiat pel tible i la tenora -capítol 2-. La longitud del tudell per tant és previsiblement un dels trets diferenciadors dels anomenats timbre "brillant" i timbre "normal" atès que per raons pràctiques l'afinació normal s'ha aconseguit usualment per mitjà de l'ús de tudells més llargs.

Finalment s'analitza la influència dels forats de registre. Tal com es va comentar en presentar les respostes impulsional experimentals del tible i la tenora -capítol 4- les variacions que presenta la resposta en destapar algun dels forats de registre són gairebé imperceptibles ja que, degut a les reduïdes dimensions d'aquests forats, les reflexions que produeixen són de molt poca magnitud. La seva influència en l'establiment de l'autoexcitació és per tant pràcticament nul·la en els primers cicles.

En els instruments de vent de doble canya, en els quals l'autoexcitació es produeix fonamentalment per mitjà del mecanisme de Bernoulli, el pas del primer al segon registre s'obté principalment gràcies al control que l'instrumentista exerceix sobre la pressió de bufada i la força amb que prem la canya -tècnica anàloga a l'emprada per produir els xiulets-.

En l'execució de les notes del primer registre, el moviment d'obertura i tancament de la canya està controlat per les reflexions que arriben del forat obert que defineix l'afinació de la nota, i per tant el període de l'ona interna correspon en primera aproximació al temps que tarden les reflexions en anar i tornar desde l'extrem d'entrada al forat.

Però en l'execució de les notes del segon registre, l'instrumentista varia el comportament dinàmic de la canya i de l'aire que hi ha al seu interior de manera que en iniciar-se l'atac el moviment de la canya, tant degut a la seva pròpia elasticitat com al mecanisme de Bernoulli, es produeix amb una periodicitat propera a la de la nota que es vol executar. Les fluctuacions de pressió generades són posteriorment reflectides al forat obert de la nota i arriben de nou a l'extrem d'entrada, passant a controlar el moviment de la

canya i ajustant el període de l'ona interna un cop transcorreguts uns quants cicles. Com que les reflexions es produeixen inicialment amb la periodicitat marcada per la canya, el règim estacionari que s'estableix a la fi presenta un període que correspon en primera aproximació a la meitat del que s'obtenia per a la nota equivalent del primer registre.

Durant l'inici de l'atac el forat de registre té poca incidència, però ajuda a consolidar-lo i un cop s'ha arribat al règim estacionari ajuda a mantenir estable el període tal com ho posa de manifest la descripció modal de l'ona interna. El forat de registre es situa en la localització del node de pressió del segon mode de vibració de la columna d'aire que es troba més proper a l'extrem d'entrada. Així quan s'obra el forat de registre, minva la pressió en la seva localització, disminuint l'amplitud del primer mode sense afectar la del segon. Aquest darrer, de freqüència fonamental aproximadament doble que la del primer, passa a governar la canya i estableix la freqüència del fonamental de la nota emesa.

La funció dels forats de registre és per tant la de facilitar l'execució de les notes del segon registre, si bé és l'actuació de l'instrumentista la principal responsable del pas d'un registre a l'altre, tal com ho posa de manifest el fet que els instrumentistes poden executar notes del segon registre sense emprar cap dels dos forats de registre de que disposen tant el tible com la tenora.

CONCLUSIONS.

CONCLUSIONS.

El treball que s'ha dut a terme ha consistit en l'estudi del comportament acústic del tible i la tenora en el domini temporal, centrat fonamentalment en tres aspectes: captació dels transitoris d'atac de les notes en diverses formes d'execució, determinació experimental i per càlcul de la resposta impulsional, i finalment la mesura, en temps real, de l'afinació de les notes d'ambdós instruments. S'ha inclòs també una anàlisi de la relació entre les característiques de la resposta impulsional i l'espontaneïtat dels atacs.

Cap dels tres aspectes havia estat estudiat anteriorment, i la recerca feta ha donat lloc a contribucions metodològiques i conceptuals.

La captació dels transitoris d'atac ha portat a desenvolupar una tècnica experimental basada en l'enregistrament digital del so captat a l'interior del tudell, en considerar-se aquest so com el més representatiu del funcionament dels mecanismes d'autoexcitació.

L'anàlisi dels atacs enregistrats ha permès establir les conclusions següents:

- . Els atacs picats d'intensitat elevada -forte i fortissimo- són molt ràpids, presentant un transitori inicial que varia entre dos i cinc períodes. Tots ells mostren a cada cicle una forta depressió associada al tancament ràpid de la doble canya sota l'efecte del mecanisme de Bernoulli.

- . Per contra els atacs de baixa intensitat -piano- presenten un transitori més llarg i la depressió que s'observa a cada cicle és més feble, signe d'una actuació més feble del mecanisme de Bernoulli.

- . També s'ha observat que el període de l'ona interna mesurat sobre l'atac, el qual correspon a l'afinació de la nota executada, és apreciablement més llarg que el període definit per la longitud de la columna d'aire. Aquest fet demostra la gran dependència de l'afinació respecte del comportament dinàmic del mecanisme d'autoexcitació.

La determinació experimental de la resposta impulsional ha portat també a desenvolupar una instrumentació d'assaig basada en l'excitació per mitjà d'una descàrrega elèctrica que es produeix entre dos electrodes situats a l'emplaçament on es trobaria la canya. S'ha prestat especial atenció a les tècniques de calibració precisa.

El càlcul de la resposta impulsional ha portat a desenvolupar un procediment de càlcul basat en la multiconvolució que la determina tot fent un seguiment temporal de les reflexions que es produeixen a les discontinuïtats del perfil interior de l'instrument. Per fer operatiu aquest procediment ha calgut desenvolupar un conjunt de funcions de reflexió per a descriure les reflexions a les discontinuïtats dels tubs cònics, que fins ara havien rebut un tractament incomplet i insatisfactori en la literatura científica, així com algorismes de convolució que resolguessin les dificultats derivades de la complexitat creixent dels càlculs que es derivarien de seguir individualment cada reflexió, i que eludissin les inestabilitats numèriques que es presenten en emprar els algorismes convencionals de convolució en casos de funcions de reflexió que contenen exponencials creixents.

El mètode desenvolupat es compara favorablement, pel que fa al temps i a la capacitat de càlcul necessaris, amb el mètode basat en l'aplicació de la Transformada Inversa de Fourier a la impedància acústica, ja que permet treballar amb una elevada resolució sense les limitacions que imposa la utilització d'un algorisme de FFT⁻¹ amb un elevat nombre de punts i a més forneix una descripció més il·lustrativa del comportament de la columna d'aire en permetre conèixer la contribució de les diferents discontinuïtats del tub en la resposta impulsional.

L'anàlisi de les respostes impulsional, tant les obtingudes experimentalment com les calculades, ha permès establir la relació existent entre les característiques del tible i la tenora i la seva espontaneïtat, atenent a la manera en que s'estableix l'autoexcitació en aquests instruments. De l'anàlisi es desprèn que:

. L'autoexcitació es possible sempre i quant la reflexió que governa el procés d'autoexcitació sigui d'intensitat elevada i presenti una durada del mateix ordre que el temps de resposta de la canya. Aquest fet implica que els

forats laterals que defineixen l'afinació siguin de diàmetre elevat per tal de generar reflexions amb aquestes característiques.

- . Els forats tapats no afecten apreciablement l'espontaneïtat dels instruments per quant generen reflexions molt estretes que no interaccionen pràcticament amb la canya.

- . Les discontinuïtats de diàmetre que s'han observat a les unions de les diferents parts dels instruments poden afectar la seva espontaneïtat ja que produeixen reflexions de magnitud anàlega a la dels forats oberts.

- . La longitud del tudell és un dels factors amb una incidència més notable sobre l'espontaneïtat en dependre acusadament d'ella la forma de les reflexions.

- . Per últim els forats de registre, emprats en l'execució de les notes del segon registre, no intervenen durant l'inici de l'atac, si bé ajuden a consolidar-lo i a mantenir estable l'ona interna durant el règim estacionari.

Finalment la mesura en temps real de l'afinació de les notes ha portat a desenvolupar un aparell rastrejador del fonamental. Aquest aparell, basat en un microprocessador, aplica diversos algorismes de detecció del fonamental que són complementaris quant a la seva precisió i capacitat de detectar canvis ràpids d'afinació -com els que en produeixen en passar d'una nota a l'altra-. Amb aquest instrument, s'han fet mesures d'afinació de les notes de diversos tiples i tenores així com d'un nombrós grup de dolçaines per interès d'un investigador d'aquests instruments.

Les mesures d'afinació realitzades amb tibles i tenores han conduït als següents resultats:

- . S'ha identificat la fluctuació en freqüència característica del vibrat. La fluctuació, anàloga en el tible i en la tenora, és de l'ordre de ± 25 centèsimes de semitò per a les notes centrals de la seva tessitura, i augmenta progressivament a mida que les notes són més agudes.

. S'ha comprovat que ambdós instruments presenten un ampli camp de llibertat en la seva afinació. Especialment el tible, en el qual l'acció del músic damunt la canya pot pujar l'afinació fins quasi un semitò.

. S'ha establert finalment la diferència entre el diapasó normal i el brillant, i s'ha comprovat que a part de la diferència en el diapasó, hi ha una diferència en color tímbric. El diapasó brillant és més ric en harmònics d'alta freqüència que el diapasó normal.

Dins les previsions de línies de treball futures un pas següent a fer en l'àrea temàtica de la tesi, seria el desenvolupament d'una tècnica experimental de la resposta impulsional que es basés en l'excitació piezoelèctrica per tal que, en disposar-se del seu model teòric, es pogués disposar d'un senyal més exactament impulsional i conegut i amb geometria més d'acord amb les ones planes o esfèriques que es propaguen al llarg del tub.

Pel que fa a la captació dels transitoris d'atac, el micròfon de 1/8 de polçada emprat per captar la pressió de l'ona interna al tudell, s'ha mostrat massa sensible a la humitat provinent dels pulmons de l'instrumentista, la qual es condensa a la membrana del micròfon. Una possible millora fora substituir el micròfon per un captador de pressió piezoresistiu de reduïdes dimensions que presentés una sensibilitat i una resposta en freqüència anàloga a les dels micròfons capacitius.

Pel que fa al càlcul de la resposta impulsional mitjançant el mètode de la multiconvolució, hi han dues millores a introduir:

. Una modelització més precisa del comportament acústic dels forats.

. I una modelització analítica del règim acústic a l'interior del pavelló que obviés la necessitat de modelitzar aquest mitjançant trams cònics. Aquesta modelització hauria de considerar el canvi de curvatura de les ones esfèriques degut a la variació de conicitat que presenta el pavelló, i l'aparició de modes transversals. La mateixa modelització inclouria com a cas límit el cas dels canvis de conicitat, en els quals es produeix un canvi sobtat de curvatura de les ones esfèriques.

L'àmbit d'aplicació dels mètodes i procediments desenvolupats ultrapassa el dels instruments musicals concrets sotmesos a estudi. En el cas del càlcul de la resposta impulsional, el mètode de multiconvolució desenvolupat és una contribució a la teoria de l'acústica dels tubs cònics amb discontinuitats que té un clar interès en els problemes de propagació d'ones en tubs de secció variable i amb ramificacions.

BIBLIOGRAFIA.

BIBLIOGRAFIA

- Abramowitz M. and A. Stegun (1965). Table of Laplace Transforms. *Handbook of Mathematical Functions* . Dover Publications, New York, 1019-1030.
- Agulló J. (1979 a). Propagació d'ones en tubs cilíndrics. *Publicació interna del Laboratori de Mecànica i Vibracions de l'ETSEIB*.
- Agulló J. (1979 b). Propagació d'ones en tubs cònics. *Publicació interna del Laboratori de Mecànica i Vibracions de l'ETSEIB*.
- Agulló J. i J. Badrinas (1985). Improving the Accuracy of the Capillary Based Technique for Measuring the Acoustic Impedance of Wind Instruments. *Acústica*. 59, 76-83.
- Agulló J. (1986). Characterizing and Improving the Catalan Woodwinds. *Proceedings del 12^{au} Congrés Internacional d'Acústica*. Toronto. III, K6-5.
- Ayers R.D., L.J. Eliason, and D. Mahgerefteh (1985). The conical bore in musical acoustics. *Am . Jour. of Physics*. 56 (6), 528-537.
- Ayers R.D. (1986). Spatial perspectives on early woodwinds bores. *Proceedings del 12^{au} Congrés Internacional d'Acústica*. Toronto. III, K4-5.
- Barjau A. i J. Agulló (1985). Respuesta impulsional en tubos cónicos truncados. *Anales de Ingenieria Mecánica*. 3 (1), 43-48.
- Barjau A. (1986). Mecanismos de autoexcitación en dispositivos de lengüetas salientes. *Anales de Ingenieria Mecánica*. 4 (1), 17-22.
- Barjau A. (1987). Contribució a l'estudi de l'acústica dels instruments de canya de la cobla. *Tesi Doctoral* . Universitat Politècnica de Catalunya.

- Benade A.H. (1960). On the Mathematical Theory of Woodwind Finger Holes. *J. Acoust. Soc. Am.* 32 (12), 1591-1608.
- Benade A.H. and E.V. Jansson (1974). On Plane and Spherical Waves in Horns with Nonuniform Flare. I: Theory of Radiation, Resonance Frequencies and Mode Conversion. *Acústica*. 31, 79-98.
- Benade A.H. (1976). Resonance Curves and the Characteristic Shapes of Woodwind Vibrational Modes. *Fundamentals of Musical Acoustics*. Oxford University Press, London, 430-435.
- Bendat J.S. and A.G. Piersol (1980). Correlation and Spectral density functions. *Engineering applications of correlation and spectral analysis*. John Wiley & Sons, New York, 43-78.
- Cardona S. (1980). Contribució a l'estudi de l'acústica de la tenora. *Tesi Doctoral*. Universitat Politècnica de Catalunya.
- Cardona S. i J. Martínez (1984). Determinación en tiempo real de la frecuencia del fundamental de una vibración casi periódica. *Anales de Ingenieria Mecánica*. 2 (2), 143-148.
- Gradshteyn I.S. and I.M. Ryzhik (1980). The probability integral and Fresnel integrals $\Phi(x)$, $S(x)$ and $C(x)$. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New York, 930-933.
- Jessel M. (1973). Sources et Rayonnement. *Acoustique théorique. Propagation et holophonie*. Masson et C^{ie}, Paris, 65-92.
- Keefe D.H. (1982 a). Theory of the Single Woodwind Tone Hole. *J. Acoust. Soc. Am.* 72 (3), 676-687.
- Keefe D.H. (1982 b). Experiments on the Single Woodwind Tone Hole. *J. Acoust. Soc. Am.* 72 (3), 688-699.
- Levine H. and J. Schwinger (1948). On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe. *Physical Review*. 73 (4), 383-406.

- Martínez J. i S. Cardona (1985). Determinación experimental de la respuesta impulsional en el interior de tubos cilíndricos y cónicos. *Anales de Ingeniería Mecánica*. 3 (1), 301-305.
- Martínez J. (1986). Coeficientes de reflexión debidos a cambios de conicidad en el perfil interior de tubos cónicos. *Anales de Ingeniería Mecánica*. 4 (1), 161-166.
- Mongi Ben Salem M. (1984). Impulse analysis method for wind instrument bores. *Thesis*. Department of Physics-Astronomy. California State University. Long Beach.
- Moreno A., L. Sánchez i altres (1986). Mastership of the acoustical spectrum of spark pulses of capacitors charged at low voltages. *Proceedings del 12^{au} Congrés Internacional d'Acústica*. Toronto. III, L2-10.
- Morse P.M. (1948 a). The wave equation. *Vibration and Sound*. 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 221-223.
- Morse P.M. (1948 b). Propagation of sound in horns. *Vibration and Sound*. 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 265-288.
- Morse P.M. (1948 c). The radiation and scatterning of Sound. *Vibration and Sound*. 2nd ed. McGraw-Hill, New York, 294-380.
- Nederveen C.J. (1969). Acoustical Aspects of Woodwind Instruments. *Thesis*. Editada per F.Knuf, Amsterdam.
- Nederveen C.J. and A. Bruijn (1967). Hole Calculations for an Oboe. *Acústica*. 18, 47-57.
- Newland D.E. (1975). Correlation. *An Introduction to Random Vibration and Spectral Analysis*. Longman, London, 21-29.
- Ortí (1986). La Dulzaina. Estudi sobre la dolçaina de la comarca de "Els Ports" a Castelló. Patrocinat per la Diputació de Castelló.

- Papoulis A. (1965). Correlation and Power Spectrum of Stationary Processes. *Probability, Random variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, 336-338.
- Rayleigh (1896). Theory of Resonators. *The Theory of Sound*. Ed. revisada (1945). Dover Publications, 170-236 i 487-492.
- Pollard H.F. and E.V. Jansson (1982). Analysis and Assessment of Musical Starting Transients. *Acústica* 51, 249-262.
- Rabiner R. and R. Schafer (1978). Pitch Period Estimation Using the Autocorrelation Function. *Digital Processing of Speech Signals*. Prentice-Hall, New York, 150-158.
- Roderer J.G. (1973). Periodicity Pitch and the Theory of Hearing. *Introduction to the Physics and Psychophysics of Music*. Springer-Verlag, New York, 44-53.
- Story A. (1986). Impulse analysis applied to the cone and straight pipe. *Thesis*. Department of Physics-Astronomy. California State University. Long Beach.
- Vivancos J. (1981). Contribució a l'estudi de l'acústica del flabiol. *Tesi Doctoral*. Universitat Politècnica de Catalunya.

**APÈNDIX-I. ESQUEMES ELÈCTRICS DEL DETECTOR
DE FONAMENTALS.**

APÈNDIX-I ESQUEMES ELÈCTRICS DEL DETECTOR DE FONAMENTALS.

ÍNDIX DE FIGURES.

- Fig. A-I.1. Circuits de comparació de nivell positiu i de nivell negatiu. Detecten quan el senyal captat pel micròfon, prèviament filtrat, passa per un dels nivells de referència establerts, i defineixen el senyal quadrat de tres nivells.
- Fig. A-I.2. Circuits de detecció "trigger" de nivell positiu i de nivell negatiu. Estableixen automàticament els nivells de referència en funció de la magnitud del senyal.
- Fig. A-I.3. Circuit generador del senyal de tres nivells i base de temps. Generen el senyal d'interrupció per al microordinador i els senyals de control per als comptadors.
- Fig. A-I.4. Circuit generador de la magnitud del senyal de tres nivells. Determina quan el senyal quadrat obtingut amb els comparadors és de magnitud -1, 0 o +1.
- Fig. A-I.5. Comptadors. Mesuren la durada de cadascuna de les parts del senyal de tres nivells i la transmeten al microordinador.

Fig A-I.1. Circuits de comparació.

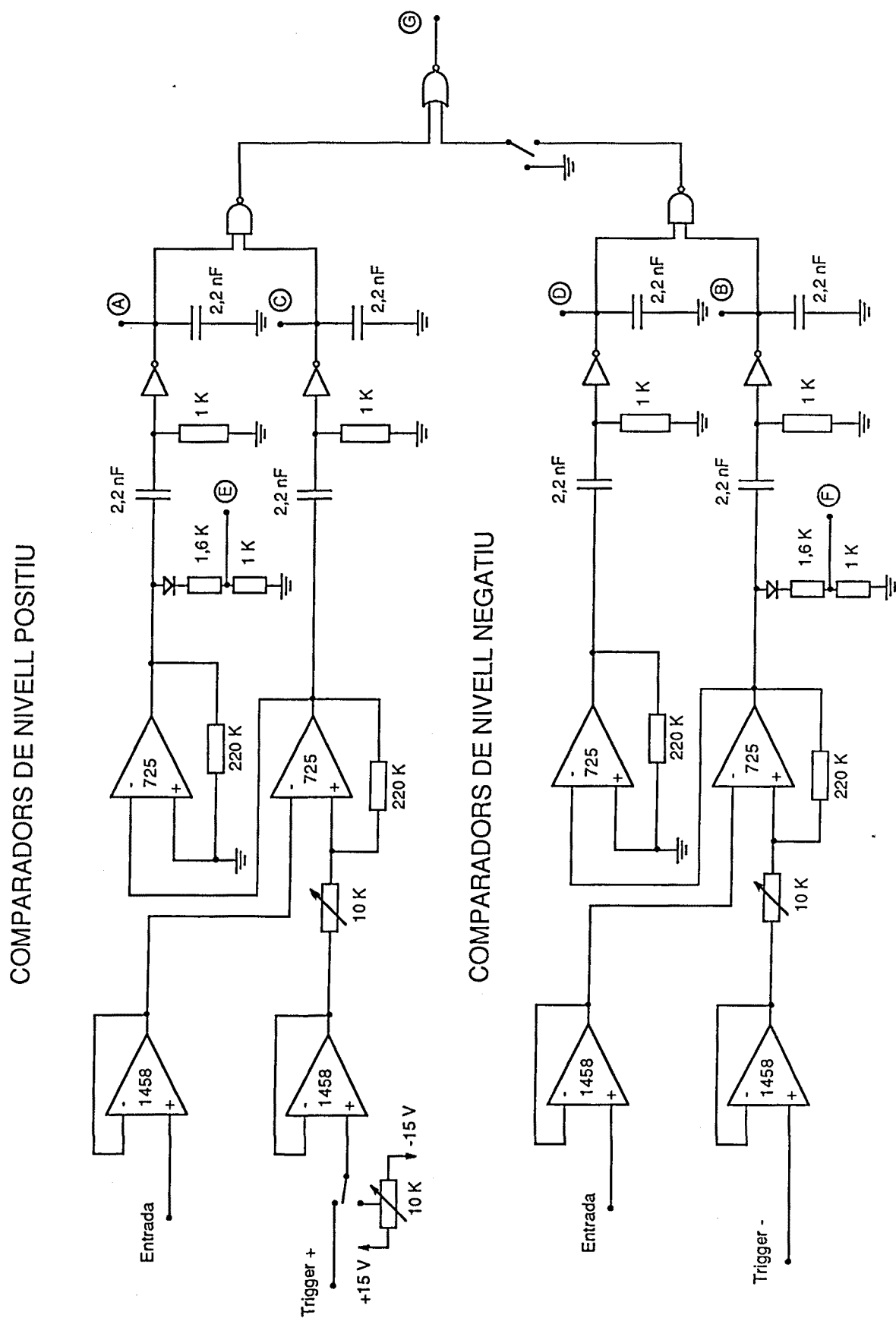
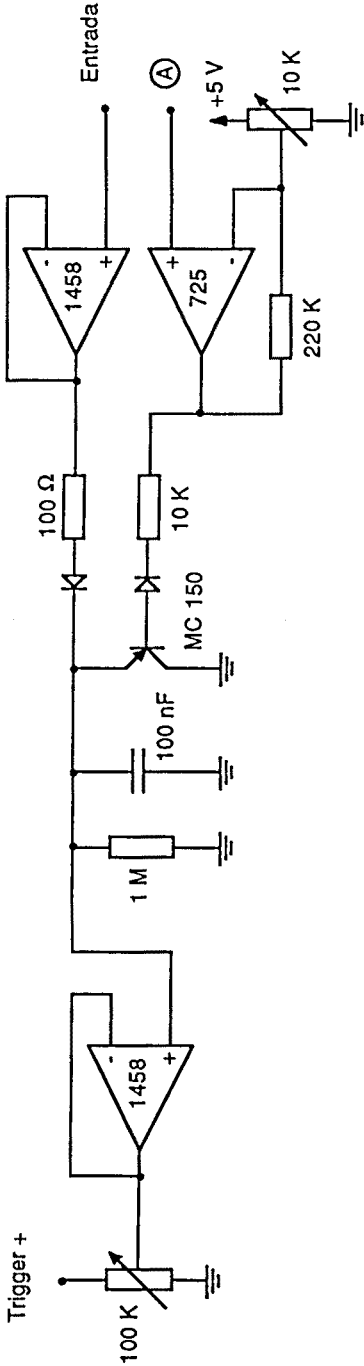


Fig A-I.2. Circuits de detecció.

TRIGGER DE NIVELL POSITIU



TRIGGER DE NIVELL NEGATIU

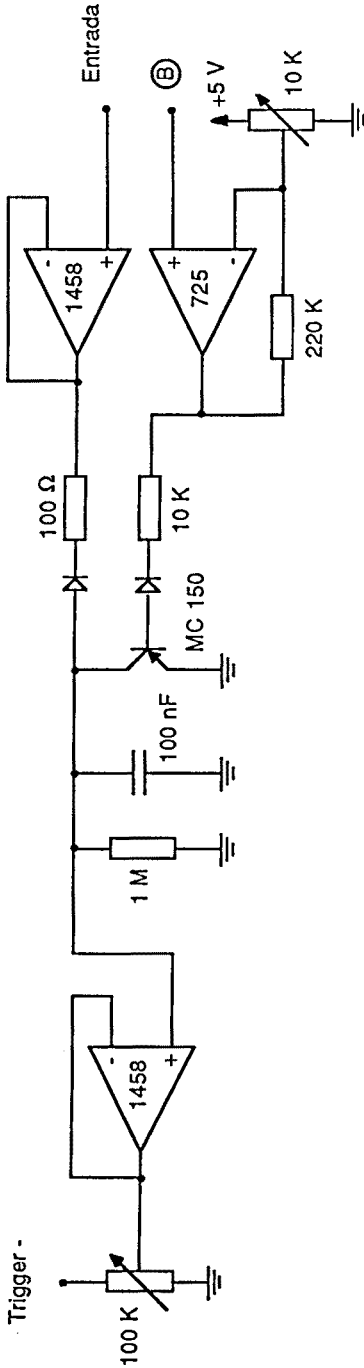


Fig A-I.3. Circuit generador del senyal de tres nivells i base de temps.

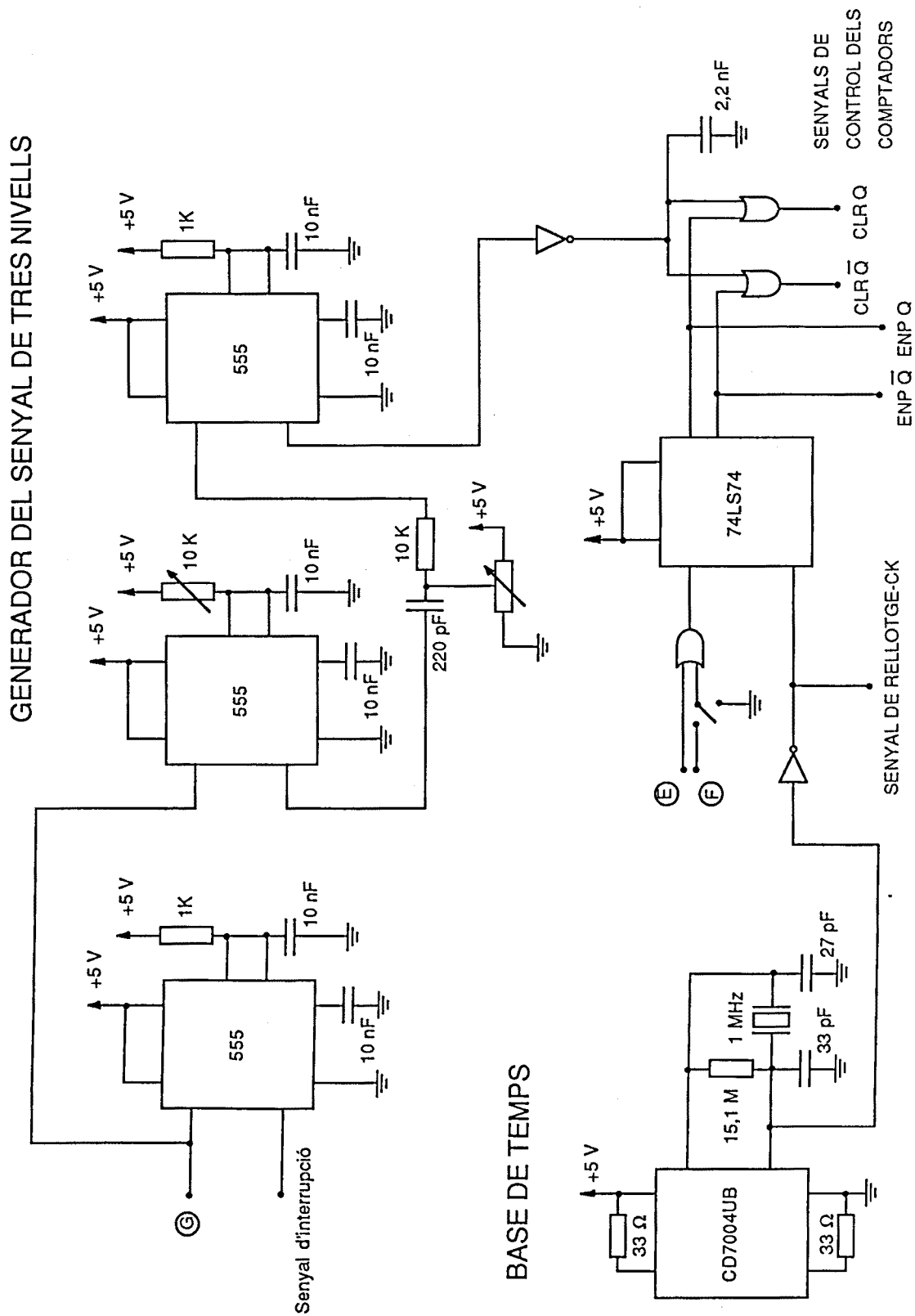


Fig A-I.4. Circuit generador de la magnitud del senyal de tres nivells.

GENERADOR DE LA MAGNITUD DEL SENYAL DE TRES NIVELLS

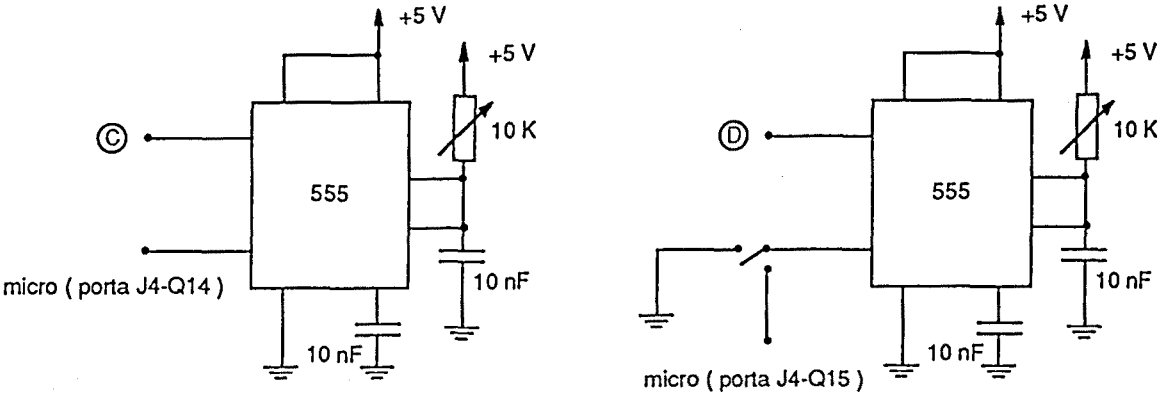
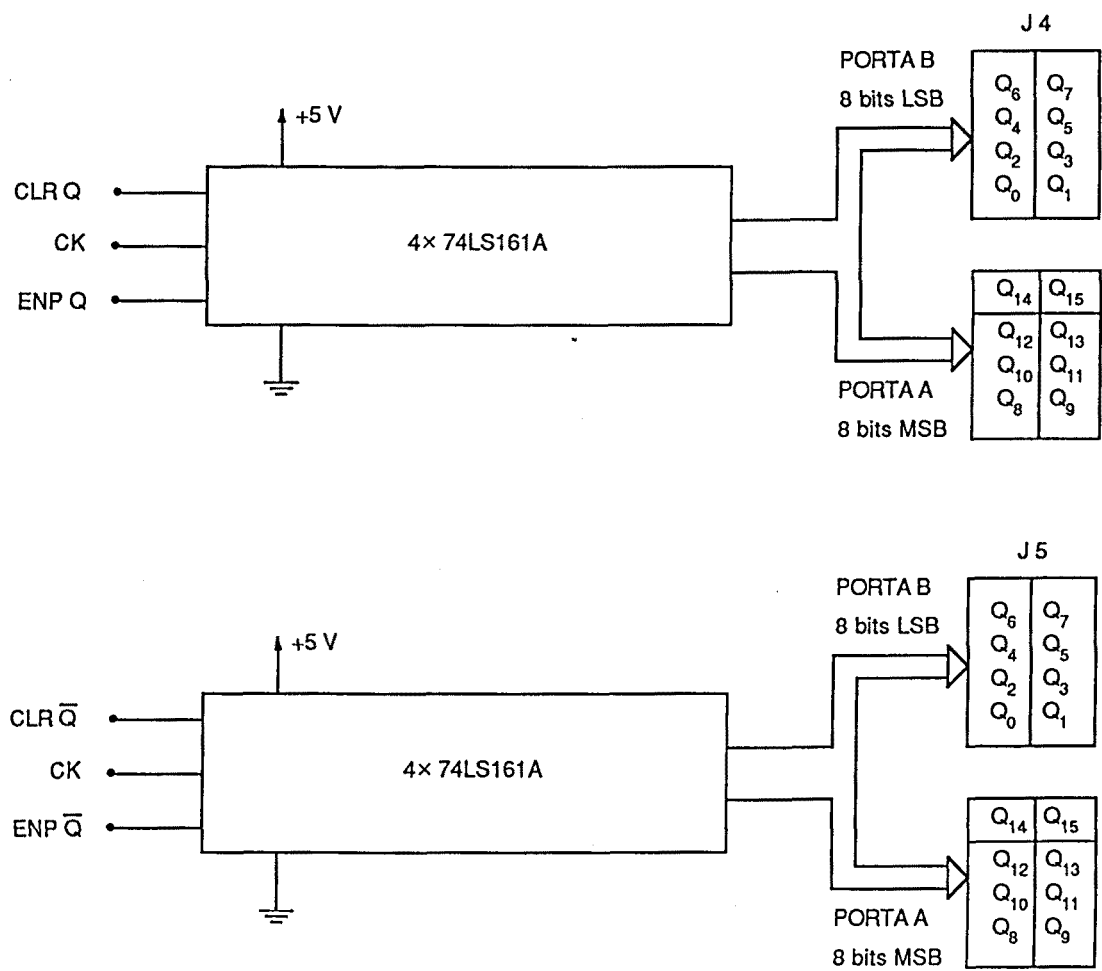


Fig A-I.5. Comptadors.

COMPTADORS I PORTES DE LECTURA DEL MICROORDINADOR



APÈNDIX-II. CÀLCUL NUMÈRIC DE LES INTEGRALS DE CONVOLUCIÓ.

A-II.1. CONVOLUCIÓ AMB UNA FUNCIO EXPONENCIAL.

**A-II-2. CONVOLUCIÓ AMB LA FUNCIO DE REFLEXIO
D'EXTREM OBERT.**

A-II.3. CONVOLUCIÓ AMB LA FUNCIO D'ESMORTEÏMENT.

APÈNDIX-II. CÀLCUL NUMÈRIC DE LES INTEGRALS DE CONVOLUCIÓ.

Totes les funcions de reflexió que s'han obtingut en el capítol 5 es defineixen mitjançant funcions impuls de Dirac i funcions exponencials, si s'exceptua la funció de reflexió a l'extrem obert la qual s'ha aproximat per una funció de distribució Gamma de paràmetre $\alpha=2$ -veure taula 5.10-I-. Aquest fet permet calcular numèricament les integrals de convolució que intervenen en l'algorisme de multiconvolució per mitjà de formulacions recurrents.

En l'algorisme es tracten per separat les funcions impuls de la resta de funcions que intervenen en la definició de les funcions de reflexió, ja que per convolucionar la pressió d'una ona incident amb un impuls només cal multiplicar la pressió pel valor de l'impuls. Quan es tracta de convolucionar la pressió de l'ona incident amb una funció exponencial o amb la funció de distribució Gamma, s'empren formulacions recurrents pròpies per a cada cas, presentades als apartats A-II.1 i A-II.2 respectivament. Pel que fa a la convolució d'una ona de pressió amb una funció d'esmoreïment, la complexitat de la darrera fa inviable la utilització d'una formulació recurrent anàloga a les abans esmentades. Aleshores la convolució es realitza mitjançant una integració numèrica convencional de la manera exposada a l'apartat A-II.3.

La utilització de formulacions recurrents presenta dues avantatges: Requereix un temps més petit que el temps requerit per les tècniques d'integració numèrica més usuals, i evita en gran part les inestabilitats numèriques derivades de la presència d'exponencials creixents en les funcions de reflexió.

A-II.1. CONVOLUCIÓ AMB UNA FUNCIO EXPONENCIAL.

Sigui $f(t)$ una funció exponencial definida per

$$f(t) = b e^{at} . \quad (A-2.1.1)$$

La convolució de $f(t)$ amb la pressió d'una ona incident, $p_i(t)$, defineix la pressió de l'ona reflectida, $p_r(t)$, d'acord amb

$$p_r(t) = \int_0^t f(\tau) p_i(t-\tau) d\tau . \quad (\text{A-2.1.2})$$

I per a l'instant posterior que s'obté en afegir l'increment de temps Δt corresponent a la discretització emprada en el càlcul, la pressió de l'ona reflectida és

$$p_r(t+\Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} f(\tau) p_i(t+\Delta t-\tau) d\tau . \quad (\text{A-2.1.3})$$

La integral de convolució es pot descompondre en dues integrals

$$p_r(t+\Delta t) = \int_0^{\Delta t} f(\tau) p_i(t+\Delta t-\tau) d\tau + \int_{\Delta t}^{t+\Delta t} f(\tau) p_i(t+\Delta t-\tau) d\tau , \quad (\text{A-2.1.4})$$

i si s'introdueix el canvi de variable $\tau = \theta + \Delta t$, la segona integral equival a la integral

$$\int_0^t f(\theta + \Delta t) p_i(t - \theta) d\theta = \int_0^t b e^{a(\theta + \Delta t)} p_i(t - \theta) d\theta . \quad (\text{A-2.1.5})$$

D'ella se'n deriva finalment

$$e^{a\Delta t} \int_0^t b e^{a\theta} p_i(t - \theta) d\theta = e^{a\Delta t} p_r(t) . \quad (\text{A-2.1.6})$$

Per tant en l'instant $t + \Delta t$ la pressió de l'ona reflectida s'obté d'acord amb

$$p_r(t+\Delta t) = e^{a\Delta t} p_i(t) + \int_0^{\Delta t} f(\tau) p_i(t+\Delta t-\tau) d\tau . \quad (\text{A-2.1.7})$$

Si Δt s'escolleix suficientment petit, es pot considerar que la variació de la pressió p_i dins d'un interval de discretització és lineal -figura A-II.1-1-, i per tant la integral definida de l'expressió A-2.1.7 es pot aproximar per

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} f(\tau) p_i(t+\Delta t-\tau) d\tau &= b \int_0^{\Delta t} e^{a\tau} [m\tau + p_i(t+\Delta t)] d\tau = \\ &= \frac{bm}{a^2} [1 + e^{a\Delta t} (a\Delta t - 1)] + \frac{b}{a} p_i(t+\Delta t) (e^{a\Delta t} - 1) , \end{aligned} \quad (\text{A-2.1.8})$$

on $m = [p_i(t) - p_i(t+\Delta t)] / \Delta t$ és el pendent de la recta.

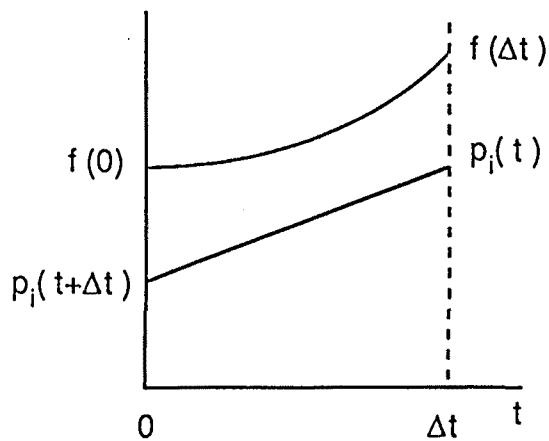


Fig. A-II.1.1 Aproximació lineal de la pressió dins d'un interval de discretització.

Finalment en substituir l'expressió A-2.1.8 en la A-2.1.7 s'obté l'expressió recurrent que permet obtenir la pressió de l'ona reflectida a l'instant considerat

$-p_r(t+\Delta t)$ - funció de la pressió a l'instant anterior $-p_r(t)$ - i de la pressió de l'ona incident a ambdós instants $-p_i(t)$ i $p_i(t+\Delta t)$ -

$$p_r(t+\Delta t) = K_1 p_r(t) + K_2 p_i(t) + K_3 p_i(t+\Delta t) , \quad (\text{A-2.1.9})$$

amb

$$\begin{aligned} K_1 &= e^{a\Delta t} \\ K_2 &= \frac{b}{a} e^{a\Delta t} - \frac{b}{a^2 \Delta t} (e^{a\Delta t} - 1) \\ K_3 &= \frac{b}{a^2 \Delta t} (e^{a\Delta t} - 1) - \frac{b}{a} . \end{aligned}$$

Per al cas particular de la funció de reflexió per a un forat obert, en ser definida mitjançant la superposició d'una funció impuls i dues funcions exponencials, s'obté una formulació recurrent més complexa. Prescindint de la funció impuls, la qual es tracta per separat, la funció que cal convolucionar és

$$f(t) = b(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) , \quad (\text{A-2.1.10})$$

la qual defineix l'ona reflectida per a l'instant $t+\Delta t$ com

$$p_r(t+\Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} f(\tau) p_i(t+\Delta t - \tau) d\tau . \quad (\text{A-2.1.11})$$

Aplicant la mateixa descomposició i el mateix canvi de variable abans emprat s'obté

$$p_r(t+\Delta t) = \int_0^{\Delta t} f(\tau) p_i(t+\Delta t - \tau) d\tau + \int_0^t b(e^{s_1(\theta+\Delta t)} - e^{s_2(\theta+\Delta t)}) p_i(t - \theta) d\theta \quad (\text{A-2.1.12})$$

Si la segona integral es descompon en dues s'obté

$$\begin{aligned}
& e^{s_1 \Delta t} \int_0^t b e^{s_1 \theta} p_i(t-\theta) d\theta + e^{s_2 \Delta t} \int_0^t -b e^{s_2 \theta} p_i(t-\theta) d\theta = \\
& = e^{s_1 \Delta t} p_{r_1}(t) + e^{s_2 \Delta t} p_{r_2}(t) .
\end{aligned}
\tag{A-2.1.13}$$

Es defineixen d'aquesta manera dues ones la superposició de les quals és l'ona reflectida

$$p_r(t) = p_{r_1}(t) + p_{r_2}(t) . \tag{A-2.1.14}$$

Introduïnt les dues darreres expressions a l'expressió A-2.1.12 s'obté finalment la formulació recurrent

$$p_r(t+\Delta t) = e^{s_2 \Delta t} p_r(t) + [e^{s_1 \Delta t} - e^{s_2 \Delta t}] p_{r_1}(t) + \int_0^{\Delta t} f(\tau) p_i(t+\Delta t-\tau) d\tau .
\tag{A-2.1.15}$$

Per al càlcul de $p_{r_1}(t)$ s'aplica la formulació recurrent establerta per a les funcions exponencials -expressió A-2.1.7-

$$p_{r_1}(t) = e^{s_1 \Delta t} p_{r_1}(t-\Delta t) + \int_0^{\Delta t} b e^{s_1 \tau} p_i(t-\tau) d\tau . \tag{A-2.1.16}$$

Finalment si s'introdueix l'aproximació lineal de la pressió entre punt i punt per al càlcul de les integrals definides de les expresions A-2.1.15 i A-2.1.16 s'obté

$$p_r(t+\Delta t) = K_1 p_r(t) + K_2 p_i(t) + K_3 p_i(t+\Delta t) + K_4 p_{r_1}(t) , \tag{A-2.1.17}$$

amb

$$p_{r_1}(t) = K_5 p_{r_1}(t-\Delta t) + K_6 p_i(t-\Delta t) + K_7 p_i(t) ,$$

i on

$$\begin{aligned}
 K_1 &= e^{s_1 \Delta t} \\
 K_2 &= b \left[\frac{e^{s_1 \Delta t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 \Delta t}}{s_2} \right] - K_a \\
 K_3 &= K_a - b \left[\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \right] \\
 K_4 &= e^{s_1 \Delta t} - e^{s_2 \Delta t} \\
 K_5 &= e^{s_1 \Delta t} \\
 K_6 &= \frac{b e^{s_1 \Delta t}}{s_1} - K_b \\
 K_7 &= K_b - \frac{b}{s_1}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \end{aligned}} \right\} \text{essent} \quad
 \begin{aligned}
 K_a &= \frac{b}{\Delta t} \left[\frac{(e^{s_1 \Delta t} - 1)}{s_1^2} - \frac{(e^{s_2 \Delta t} - 1)}{s_2^2} \right] \\
 K_b &= \frac{b}{s_1^2 \Delta t} (e^{s_1 \Delta t} - 1)
 \end{aligned}$$

A-II.2. CONVOLUCIÓ AMB LA FUNCIÓ DE REFLEXIÓ A L'EXTREM OBERT.

Sigui $f(t)$ la funció de reflexió a l'extrem obert definida per

$$f(t) = -a^2 t e^{at} \quad \text{amb } a < 0 \quad . \quad (\text{A-2.2.1})$$

El mateix procediment emprat a l'apartat anterior permet descompondre la integral de convolució que defineix la pressió de l'ona reflectida a l'instant $t + \Delta t$ en dues integrals

$$p_r(t + \Delta t) = \int_0^{\Delta t} f(\tau) p_i(t + \Delta t - \tau) d\tau + \int_0^t -a^2 (\theta + \Delta t) e^{a(\theta + \Delta t)} p_i(t - \theta) d\theta$$

(A-2.2.2)

essent la segona integral equivalent a

$$\begin{aligned}
& e^{a\Delta t} \int_0^t -a^2 \theta e^{a\theta} p_i(t-\theta) d\theta - a^2 \Delta t e^{a\Delta t} \int_0^t e^{a\theta} p_i(t-\theta) d\theta = \\
& \quad (A-2.2.3) \\
& = e^{a\Delta t} p_r(t) + f(\Delta t) p_a(t) .
\end{aligned}$$

La funció $p_a(t)$ és el resultat de convolucionar la pressió de l'ona incident amb una funció $g(t) = e^{at}$ i apareix com a resultat de la descomposició introduïda. Per al seu càlcul s'empra la formulació recurrent establerta a l'apartat anterior per al cas de funcions exponencials -expressió A-2.1.7-, amb el que la pressió de l'ona reflectida és finalment

$$p_r(t+\Delta t) = e^{a\Delta t} p_r(t) + f(\Delta t) p_a(t) + \int_0^{\Delta t} f(\tau) p_i(t+\Delta t-\tau) d\tau \quad (A-2.2.4)$$

amb

$$p_a(t) = e^{a\Delta t} p_a(t-\Delta t) + \int_0^{\Delta t} g(\tau) p_i(t-\tau) d\tau .$$

Si de nou es considera que la pressió de l'ona incident varia linealment dins d'un interval de discretització, la primera integral definida de l'expressió A-2.2.4 es poden aproximar per

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\Delta t} f(\tau) p_i(t+\Delta t-\tau) d\tau = \int_0^{\Delta t} -a^2 \tau e^{a\tau} [m\tau + p_i(t+\Delta t)] d\tau = \\
& \quad (A-2.2.5) \\
& = m \left[\frac{2}{a} (1 + e^{a\Delta t} (a\Delta t - 1)) - a\Delta t^2 e^{a\Delta t} \right] - p_i(t+\Delta t) [1 + e^{a\Delta t} (a\Delta t - 1)] ,
\end{aligned}$$

i la segona integral definida per

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\Delta t} g(\tau) p_i(t-\tau) d\tau &= \int_0^{\Delta t} e^{a\tau} [n\tau + p_i(t)] d\tau = \\
 &= \frac{n}{a^2} [1 + e^{a\Delta t} (a\Delta t - 1)] + \frac{p_i(t)}{a} (e^{a\Delta t} - 1) ,
 \end{aligned}
 \tag{A-2.2.6}$$

on $m = [p_i(t) - p_i(t + \Delta t)] / \Delta t$ i $n = [p_i(t - \Delta t) - p_i(t)] / \Delta t$.

Finalment, la formulació recurrent per a determinar la pressió de l'ona reflectida s'obté en substituir les expressions A-2.2.5 i A-2.2.6 en A-2.2.4

$$p_r(t + \Delta t) = K_1 p_r(t) + K_2 p_i(t) + K_3 p_i(t + \Delta t) + K_4 p_a(t) , \tag{A-2.2.7}$$

amb

$$p_a(t) = K_5 p_a(t - \Delta t) + K_6 p_i(t - \Delta t) + K_7 p_i(t) ,$$

i on

$$K_1 = e^{a\Delta t}$$

$$K_2 = \frac{2}{a\Delta t} [1 + e^{a\Delta t} (a\Delta t - 1)] - a\Delta t e^{a\Delta t}$$

$$K_3 = -K_2 - [1 + e^{a\Delta t} (a\Delta t - 1)]$$

$$K_4 = -a^2 \Delta t e^{a\Delta t}$$

$$K_5 = e^{a\Delta t}$$

$$K_6 = \frac{1}{a^2 \Delta t} [1 + e^{a\Delta t} (a\Delta t - 1)]$$

$$K_7 = \frac{1}{a} (e^{a\Delta t} - 1) - K_6 .$$

A-II.3. CONVOLUCIÓ AMB LA FUNCIO D'ESMORTEÏMENT.

Tal com s'establí a l'apartat 9 del capítol 5, l'efecte de l'esmoreïment sobre la pressió de les ones que es propaguen al llarg d'un tram, ja sigui aquest cilíndric o cònic, es modelitza mitjançant la funció

$$\sigma(t) = \frac{B \xi}{2\sqrt{\pi} (t-L/c)^{3/2}} e^{-\frac{\xi^2}{4(t-L/c)}} \quad , \quad (A-2.3.1)$$

on

$$\xi = [\sqrt{2} \zeta_0 L] / [c^{3/2} d] \quad ,$$

i essent

L : Longitud del tram.

d : Diàmetre mitjà del tram.

ζ_0 : Constant d'esmoreïment.

$B=1$ per al cas d'un tram cilíndric.

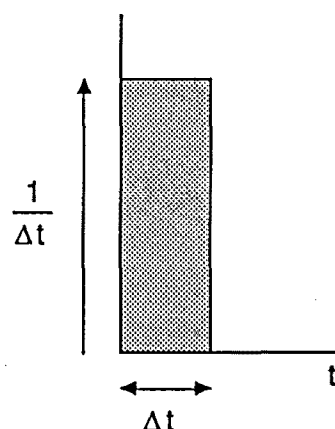
$B= d_f / d_i$ relació entre els diàmetres de les seccions final i inicial, per al cas d'un tram cònic.

La complexitat de l'expressió A-2.3.1 fa inviable la obtenció d'una formulació recurrent simple, per la qual cosa s'ha optat per determinar la convolució entre les pressions i les funcions d'esmoreïment mitjançant una integració numèrica convencional.

La funció d'esmoreïment, per a les longituds usals que presenten els trams dels instruments musicals, és molt estreta -fins hi tot de durada inferior als temps de discretització normalment emprats en l'algorisme de multiconvolució-. Això fa necessari realitzar un tractament analític previ per tal d'evitar errors importants en la determinació numèrica de la integral de convolució.

Aquest tractament previ consisteix en convolucionar la funció d'esmoreïment amb una funció quadrada d'àrea unitària i amplada igual al temps de discretització Δt , representativa d'un impuls unitari de pressió -figura A-II.3-1-.

Fig. A-II.3.1 Funció quadrada representativa d'un impuls unitari de pressió.



Com que el temps que tarda l'impuls en recorre la longitud L del tram ja es considera en l'estructura general de l'algorisme de multiconvolució -concretament en el corrent dels registres representatius de les dues ones resultants- la funció d'esmoreïment que cal emprar en la multiconvolució és

$$\sigma(t) = a t^{-3/2} e^{-b/t} \quad \text{amb} \quad \begin{cases} a = B \xi / 2 \sqrt{\pi} \\ b = \xi^2 / 4 \end{cases} \quad (\text{A-2.3.2})$$

La convolució amb l'ona quadrada d'àrea unitària porta a

$$\begin{aligned} \sigma_q &= \int_0^t \frac{1}{\Delta t} a(t-\tau)^{-3/2} e^{-b/(t-\tau)} d\tau \quad \text{per a } 0 \leq t \leq \Delta t \\ & , \quad (\text{A-2.3.3}) \\ \sigma_q &= \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} a(t-\tau)^{-3/2} e^{-b/(t-\tau)} d\tau \quad \text{per a } t > \Delta t \end{aligned}$$

i si s'introdueix el canvi de variable $\theta = 1/(t-\tau)$ d'on $d\tau = d\theta/\theta^2$, la convolució passa a ser

$$\sigma_q = \frac{a}{\Delta t} \int_{1/t}^{\infty} \theta^{-1/2} e^{-b\theta} d\theta \quad \text{per a } 0 \leq t \leq \Delta t$$

$$\sigma_q = \frac{a}{\Delta t} \int_{1/t}^{1/(t-\Delta t)} \theta^{-1/2} e^{-b\theta} d\theta \quad \text{per a } t > \Delta t$$
(A-2.3.4)

la qual es pot descompondre en dues integrals de la forma

$$\sigma_q = \frac{a}{\Delta t} \left[\int_0^{\infty} \theta^{-1/2} e^{-b\theta} d\theta - \int_0^{1/t} \theta^{-1/2} e^{-b\theta} d\theta \right] \quad \text{per a } 0 \leq t \leq \Delta t$$

$$\sigma_q = \frac{a}{\Delta t} \left[\int_0^{1/(t-\Delta t)} \theta^{-1/2} e^{-b\theta} d\theta - \int_0^{1/t} \theta^{-1/2} e^{-b\theta} d\theta \right] \quad \text{per a } t > \Delta t$$
(A-2.3.5)

Cadascuna d'aquestes integrals es pot determinar a partir de la funció Φ -funció integral de Bessel- definida per (Gradshteyn 1980)

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y^2} u^{-1/2} e^{-u} du \quad ,$$
(A-2.3.6)

amb $\Phi(0) = 0$ i $\Phi(\infty) = 1$.

D'ella es dedueix, fent el canvi de variable $b\theta = u$

$$\int_0^y \theta^{-1/2} e^{-b\theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{b}} \int_0^{by} u^{-1/2} e^{-u} du = \sqrt{\pi/b} \Phi(\sqrt{by})$$

$$\int_0^{\infty} \theta^{-1/2} e^{-b\theta} d\theta = \sqrt{\pi/b}$$
(A-2.3.7)

I per tant la integral de convolució, expresada en funció de Φ , adopta la forma

$$\begin{aligned}\sigma_q &= \frac{a}{\Delta t} \sqrt{\pi/b} [1 - \Phi(\sqrt{b/t})] = \frac{B}{\Delta t} [1 - \Phi(\sqrt{b/t})] \quad \text{per a } 0 \leq t \leq \Delta t \\ \sigma_q &= \frac{a}{\Delta t} \sqrt{\pi/b} [\Phi(\sqrt{\frac{b}{t-\Delta t}}) - \Phi(\sqrt{b/t})] = \quad , \quad (\text{A-2.3.8}) \\ &= \frac{B}{\Delta t} [\Phi(\sqrt{\frac{b}{t-\Delta t}}) - \Phi(\sqrt{b/t})] \quad \text{per a } t > \Delta t\end{aligned}$$

ja que el terme $a(\pi/b)^{1/2} = B$ -relació de diàmetres-, tal com es comprova en substituir els valors de a i b presentats a l'expressió A-2.3.2.

Finalment, si s'aproxima la funció Φ pel primer terme del seu desenvolupament en sèrie (Gradshteyn 1980)

$$\Phi(\sqrt{by}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(by)^{i-1/2}}{(2i-1)(i-1)!} \quad , \quad (\text{A-2.3.9})$$

el resultat de la convolució es pot aproximar per

$$\begin{aligned}\sigma_q &= \frac{B}{\Delta t} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{b/t} \right] \quad \text{per a } 0 \leq t \leq \Delta t \\ \sigma_q &= \frac{2B}{\Delta t \sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\frac{b}{t-\Delta t}} - \sqrt{b/t} \right] \quad \text{per a } t > \Delta t\end{aligned} \quad . \quad (\text{A-2.3.10})$$

El desenvolupament en sèrie només convergeix si b/t i $b/(t-\Delta t) < 1$, condició que es verifica a la pràctica ja que la constant b , pels valors usals d'esmoreïment, és inferior a $1 \mu s$, molt més petita que les discretitzacions Δt emprades. Aques fet a més dona una ràpida convergència a la sèrie i permet acceptar com a correcta l'aproximació de primer ordre.

Per a $t=0$ l'aproximació no defineix el valor de $\sigma_q(t)$. En aquest cas cal

recorrer a la solució exacta -expressió A-2.3.8- per a la qual s'estableix el resultat $\sigma_q(0) = 0$. El valor màxim de la funció ve donat per

$$\sigma_q(\Delta t) = \frac{B}{\Delta t} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{b / \Delta t} \right] \quad . \quad (\text{A-2.3.11})$$

La figura A-II.3-2 mostra la forma de la funció σ_q per al cas $\Delta t = 200 \mu\text{s}$, $B=1$ i $b=5,8 \times 10^{-7} \text{ s}$.

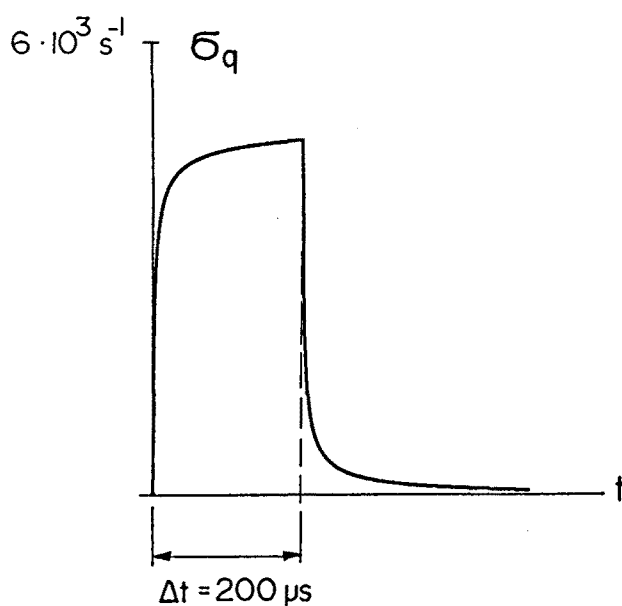


Fig. A-II.3.2 Funció σ_q per al cas d'una ona quadrada d'amplada $\Delta t = 200 \mu\text{s}$. $B = 1$ i $b = 5,8 \times 10^{-7} \text{ s}$.

Un cop definida la funció σ_q , la convolució numèrica amb la pressió es realitza definint la pressió com una successió d'impulsos, representats per funcions quadrades d'amplada Δt i d'àrea el valor de la pressió a cada instant, i convolucionant aquesta successió amb la funció σ_q . A tal fi es multiplica la funció σ_q per l'àrea de cada impuls i es superposa amb els resultats anteriors, prèviament decalada el temps de discretització Δt tal com estableix la integral de convolució.